



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DOCTOR EN MATEMÁTICA

EXTENSIONES TRIVIALES Y ÁLGEBRAS INCLINADAS
ITERADAS

Elsa Adriana Fernández

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

1999

A la memoria de mis Padres

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática y en el Instituto de Matemática (INMABB), durante el período comprendido entre el 7 de diciembre de 1995 y el 16 de julio de 1999, bajo la dirección de la Dra. María Inés Platzcek, Profesor Titular del Departamento de Matemática.

16 de julio de 1999

Elsa A. Fernández

Departamento de Matemática

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Agradecimientos

Deseo manifestar mi agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que colaboraron para que este trabajo fuera posible.

En primer lugar a mi directora de Tesis, Dra. María Inés Platzeck, por su apoyo en la realización de este trabajo, por sus inestimables aportes, sugerencias y observaciones. Gracias también por su dedicación incondicional, su infinita paciencia y los incentivos que supo transmitirme para superar los obstáculos que se presentaron en el camino.

Al Departamento e Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, que posibilitaron de diversas maneras el desarrollo de este trabajo.

A todo el Grupo de Representaciones de Álgebras, por el respaldo y colaboración brindado en estos años.

Al Dr. Darío Picco, por su excelente disposición para enseñarme a enseñar y el estímulo recibido en momentos difíciles.

A mis amigos, de un modo muy especial a Susy, por su constante soporte y por compartir día a día mis alegrías y sinsabores.

A Elena, Luis y Roberto, que colaboraron en muchas oportunidades para hacer posible mi participación en Cursos y Congresos.

A Luis, por el especial esmero puesto en la transcripción del manuscrito a la computadora.

A mi hijo, Gabriel, por tolerar mis ausencias. Sin duda, nada hubiera sido posible sin su paciencia y comprensión.

A todos: Muchas gracias.

Resumen

En este trabajo, k denota a un cuerpo algebraicamente cerrado y todas las álgebras son finitamente generadas como espacio vectorial sobre k .

Para un álgebra Λ , se llama **extensión trivial** de Λ al álgebra $T(\Lambda)$ definida como el espacio vectorial $\Lambda \amalg D(\Lambda)$ y donde el producto está dado por:

$$(\lambda, f)(\mu, g) = (\lambda\mu, \lambda g + f\mu) \quad \text{para } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ y } f, g \in D(\Lambda).$$

Nuestro primer objetivo es describir el diagrama y las relaciones de $T(\Lambda)$, en el caso en que Λ es un álgebra schurian. La descripción que obtenemos es simple, pero sumamente útil, pues nos permite en particular caracterizar todas las álgebras Λ' schurian tales que $T(\Lambda')$ es isomorfa a $T(\Lambda)$.

Es un hecho conocido que para un álgebra Λ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q .
- ii) Existe un álgebra inclinada Λ' de tipo Dynkin Q tal que $T(\Lambda)$ es isomorfa a $T(\Lambda')$.
- iii) Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Q .

La equivalencia de las dos primeras condiciones fue probada por D. Hughes y J. Waschbüsch en [HuW], mientras que la prueba de la equivalencia entre i) y iii) se debe a I. Assem, D. Happel y O. Roldán [AsHR].

Combinando fundamentalmente estos resultados y la descripción dada del diagrama y relaciones de $T(\Lambda)$, se obtiene una clasificación completa de las extensiones triviales de tipo de representación finito.

Una vez clasificadas las extensiones triviales de tipo de representación finito probamos, con un enfoque unificado, los teoremas de clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin A_n , D_n y E_6 , dados por diferentes autores. Con las mismas técnicas, indicamos como obtener las álgebras inclinadas iteradas de tipos E_7 y E_8 , clasificadas por B. Roggen [Ro].

Finalmente, mostramos la utilidad de estas técnicas en el estudio de las álgebras inclinadas iteradas de tipo \tilde{D}_n ó \tilde{E}_p .

Índice General

Prefacio	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Índice General	iv
Introducción	1
Preliminares	6
1 Diagrama y relaciones de la extensión trivial de un álgebra schurian	12
1.1 Extensión trivial de un álgebra	12
1.2 El diagrama ordinario de $T(\Lambda)$	14
1.3 Descripción de las relaciones	18
1.4 Aplicación: Número de sumandos directos indescomponibles de los módulos $rP/\text{soc } P$	31
2 Álgebras inclinadas iteradas y extensiones triviales	36
2.1 El proceso inclinante	36
2.2 Álgebras inclinadas	41
2.3 Álgebras inclinadas iteradas	43
2.4 Extensiones triviales	45
3 Clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito	50

3.1	Extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio	51
3.2	Extensiones triviales de tipo de representación finito con $\text{r}P/\text{soc } P$ indecomponible para todo P	59
3.2.1	Caso $n_a = 1$	59
3.2.2	Caso $n_a = 2$	60
3.2.3	Minimales con $n_a \geq 3$	61
3.2.4	De clase de Cartan \mathbb{A}_n	75
3.2.5	De clase de Cartan \mathbb{E}_6	75
3.2.6	De clase de Cartan \mathbb{D}_n	78
3.2.7	De clase de Cartan \mathbb{E}_7	80
3.2.8	De clase de Cartan \mathbb{E}_8	86
3.3	Extensiones triviales de tipo de representación finito tales que el máximo número de sumandos de $\text{r}P/\text{soc } P$ es dos	102
3.3.1	De clase de Cartan \mathbb{A}_n	103
3.3.2	De clase de Cartan \mathbb{E}_6	107
3.3.3	De clase de Cartan \mathbb{D}_n	109
3.3.4	De clase de Cartan \mathbb{E}_7	114
3.3.5	De clase de Cartan \mathbb{E}_8	119
4	Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin	125
4.1	Álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n y \mathbb{E}_6	126
4.1.1	Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{A}_n	126
4.1.2	Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{D}_n	129
4.1.3	Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{E}_6	134
4.1.4	Álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8	139
4.2	Álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$	141
	Bibliografía	145

Introducción

En teoría de representaciones interesa, para un álgebra Λ de dimensión finita sobre un cuerpo, obtener información sobre Λ a partir del conocimiento de sus módulos. En un contexto más general, se estudia la categoría de módulos finitamente generados a izquierda (o a derecha) sobre un álgebra de artin, esto es, un álgebra finitamente generada como módulo sobre su centro que es un anillo conmutativo artiniano.

En este trabajo, se consideran álgebras Λ básicas de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , lo cual permite describir a Λ como el álgebra de caminos de un diagrama finito Q con relaciones, como prueba un importante teorema debido a P. Gabriel. Los módulos considerados son módulos a izquierda finitamente generados y $D = \text{Hom}_k(, k)$ designa la dualidad usual de un álgebra.

Uno de los problemas clásicos en teoría de representaciones es el de clasificar álgebras de tipo de representación finito, es decir, con un número finito de módulos indescomponibles no isomorfos.

Un aporte fundamental en esta dirección fue dado por P. Gabriel en el teorema que lleva su nombre, donde se caracterizan las álgebras hereditarias (álgebras en las que un submódulo de un módulo proyectivo, es proyectivo) de tipo de representación finito como aquéllas que corresponden a los diagramas de Dynkin.

Más tarde, L. Nazarova y otros caracterizaron a las álgebras de caminos hereditarias mansas (álgebras de caminos hereditarias de tipo de representación infinito, donde los módulos indescomponibles pueden ser, de alguna manera, parametrizados) como aquéllas que corresponden a los diagramas de Dynkin extendidos, a saber: \tilde{A}_n , \tilde{D}_n ó \tilde{E}_p , con $p = 6, 7, 8$, también conocidos como diagramas de tipo euclideano.

Otro problema de interés en teoría de representaciones, es el estudio de ciertos tipos específicos de álgebras. Por ejemplo, las álgebras autoinyectivas Λ que son las álgebras tales que Λ es un Λ -módulo inyectivo. Esta clase de álgebras incluye a las álgebras simétricas, es decir, las que verifican $\Lambda \simeq D(\Lambda)$ como $\Lambda - \Lambda$ bimódulo.

Es bien conocido el hecho de que para toda álgebra Λ existe un álgebra simétrica Γ , tal que Λ es cociente de Γ .

Ejemplos importantes de álgebras simétricas son: el álgebra de grupo kG , de un grupo finito G sobre el cuerpo k y las extensiones triviales. Estas últimas serán objeto de nuestro estudio.

Recordemos que la extensión trivial $T(\Lambda)$ de un álgebra Λ dada, se define como el espacio vectorial $\Lambda \amalg D(\Lambda)$ y donde el producto está dado por:

$$(\lambda, f)(\mu, g) = (\lambda\mu, \lambda g + f\mu) \quad \text{para } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ y } f, g \in D(\Lambda).$$

El estudio de la extensión trivial de un álgebra provee importante información sobre la misma y recíprocamente. Esta idea se ve reflejada, por ejemplo, en el trabajo de K. Yamagata [Y2] en 1981, donde se prueba que si el diagrama ordinario de Λ tiene ciclos orientados, entonces $T(\Lambda)$ es de tipo de representación infinito. Otra contribución en esta dirección fue dada por H. Tachikawa [T] en 1980, con un importante teorema, donde muestra que para un álgebra hereditaria Λ , $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito si, y sólo si, Λ es de tipo de representación finito.

Las extensiones triviales de tipo de representación finito están estrechamente relacionadas con otra clase de álgebras, a saber: las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin, y esta última clase contiene a la de las álgebras inclinadas de tipo Dynkin.

La idea principal de la teoría inclinante es, dada un álgebra, construir un módulo tal que la categoría de módulos de su álgebra de endomorfismos se asemeje a la categoría de módulos del álgebra original, más en general, que no sea equivalente. Puesto que la categoría de módulos de un álgebra hereditaria es bien conocida, se busca aprovechar este conocimiento y transferirlo a través de la teoría inclinante. Recordemos que dado un diagrama Q finito, conexo y sin ciclos orientados, un álgebra Λ se dice inclinada de tipo $|Q|$ si existe un módulo inclinante U sobre el álgebra hereditaria $\Gamma = kQ$ tal que $\Lambda = \text{End}_{\Gamma}(U)^{op}$.

Una vez que se tiene un buen manejo de las álgebras inclinadas, surge la idea de iterar el proceso y obtener así un conocimiento razonable de la categoría de módulos de una clase mayor de álgebras. De esta manera, aparece de un modo natural el concepto de álgebra inclinada iterada. Informalmente hablando, aquéllas que se obtienen a partir de un álgebra hereditaria reiterando el proceso inclinante un número finito de veces.

La teoría inclinante ha sido extensamente estudiada. Uno de los problemas que ha suscitado gran interés es la clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin. Numerosos matemáticos han trabajado en el tema, utilizando diversas técnicas, hasta completar la clasificación. (Ver, por ejemplo, [AsH], [AsS2], [Ha] y [Ro]).

La estrecha relación entre las álgebras inclinadas iteradas y las extensiones triviales de tipo de representación finito mencionada anteriormente, se manifiesta en los trabajos de D. Hughes y J. Waschbüsch [HuW] e I. Assem, D. Happel y O. Roldán [AsHR]. En el primero se prueba que las extensiones triviales $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito de clase de Cartan Q son precisamente las extensiones triviales de las álgebras inclinadas de tipo Dynkin Q . Mientras que

en el segundo se demuestra que $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q si, y sólo si, Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Q . Llamaremos a estos teoremas **Teorema [HW]** y **Teorema [AHR]**, respectivamente.

En este trabajo, damos la descripción del diagrama y las relaciones de $T(\Lambda)$, donde Λ es un álgebra schurian. Esta descripción es simple y sumamente útil, pues permite, por ejemplo, hallar todas las álgebras Λ' schurian tales que $T(\Lambda')$ es isomorfa a $T(\Lambda)$.

Combinando fundamentalmente este resultado, el **Teorema [HW]** y el **Teorema [AHR]**, clasificamos las extensiones triviales de tipo de representación finito. Determinar si una extensión trivial $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, equivale a decidir si entre todas las álgebras Λ' tales que $T(\Lambda')$ es isomorfa a $T(\Lambda)$, hay alguna que sea inclinada de tipo Dynkin. En todos los casos, esto se resuelve exitosamente, pues o bien exhibimos tal Λ' o hallamos un cociente de $T(\Lambda)$ de tipo de representación infinito, lo que muestra que $T(\Lambda)$ es también de tipo infinito.

La tarea es particularmente sencilla cuando Λ' es hereditaria de tipo Dynkin o un álgebra cociente de $T(\Lambda)$ es hereditaria, pero no de tipo Dynkin. Aunque esto es frecuente, no siempre sucede. En el caso general, es de suma utilidad el trabajo de D. Happel y D. Vossieck [HaV] (ver también K. Bongartz [Bo2]), en el que se clasifican las álgebras minimales de tipo de representación infinito cuyo gráfico de Auslander – Reiten tiene una componente preproyectiva. A la lista de diagramas con relaciones dada en [HaV] la llamaremos **lista [HV]**. A veces, usaremos esta lista para mostrar que un álgebra es de tipo de representación infinito y en otros casos, para probar que un álgebra Λ' tal que $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$, es inclinada de tipo Dynkin.

Clasificadas las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan Q , el método para decidir si un álgebra Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Q consiste en: construir su extensión trivial $T(\Lambda)$ y ver si la misma es isomorfa a alguna de las extensiones triviales de la clase correspondiente, dadas en este trabajo.

Más aún, con un enfoque unificado, obtenemos los teoremas de clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n y \mathbb{E}_6 , dados por diferentes autores. Respecto a las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_p , con $p = 7, 8$, sólo mostramos que la técnica usada en los otros casos permite obtener una lista completa de las mismas, pero no las incluimos dado que el número de casos a considerar es muy elevado.

En resumen, se reduce el problema de clasificar álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin al de clasificar extensiones triviales de tipo de representación finito, y este último se reduce, finalmente, a determinar si ciertas álgebras son inclinadas de tipo Dynkin. Lo que permite resolver ambos problemas de clasificación es la forma en que se complementan los casos en los que podemos decidir fácilmente que una extensión trivial es de tipo de representación infinito, con aquéllos en los que es posible determinar si un álgebra es inclinada de tipo Dynkin.

A continuación, indicamos la organización del presente trabajo. El **Capítulo 1** está dividido en cuatro secciones. La primera de ellas contiene definiciones y propiedades básicas de la ex-

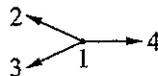
tensión trivial de un álgebra. Las dos secciones siguientes constituyen la parte principal de este capítulo, están dedicadas específicamente a describir el diagrama y las relaciones de la extensión trivial $T(\Lambda)$, donde Λ es un álgebra schurian. Por último, en la Sección 1.4 aplicamos la descripción dada en las secciones previas a efectos de obtener una interpretación sencilla, pero sumamente útil de los resultados de S. Brenner [Br].

En el Capítulo 2 comenzamos presentando los conceptos básicos de la teoría inclinante e indicamos algunos hechos conocidos sobre álgebras inclinadas iteradas. De gran utilidad para nuestro propósito es el Teorema 2.2.6. El mismo afirma que si Σ es un álgebra de la lista [HV] y e un idempotente asociado a una fuente en Q_Σ , entonces, $\Sigma/\Sigma e\Sigma$ es inclinada de tipo Dynkin. El capítulo concluye con algunos resultados sobre extensiones triviales probados por diferentes autores, dado que varios de los mismos juegan un rol central en la resolución de nuestro problema de clasificación.

En el Capítulo 3 damos la clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito. Consideramos tres casos, de acuerdo al número de sumandos directos indescomponibles de los módulos $rP/\text{soc } P$; donde P es proyectivo indescomponible. El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema. *Una extensión trivial $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito si, y sólo si, verifica una y sólo una de las siguientes condiciones:*

(a) $T(\Lambda) \simeq T(\Lambda')$, donde Λ' se obtiene de:



agregando un ramo truncado en el vértice 4, o bien agregando un ramo truncado de longitud dos en el vértice 3 y un ramo truncado de longitud mayor que uno y a lo sumo cuatro en el vértice 4.

(b) (b₁) Para todo vértice a en $Q_{T(\Lambda)}$, cada clase de congruencia de ciclos tiene un sólo elemento.

(b₂) Sea $l \geq 3$. Si C_1, \dots, C_l son ciclos orientados en $Q_{T(\Lambda)}$, tales que

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset, \dots, C_{l-1} \cap C_l \neq \emptyset,$$

entonces $C_l \cap C_1 = \emptyset$.

(c) El diagrama ordinario de $T(\Lambda)$ con las relaciones correspondientes, es uno de los listados en los corolarios 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.9 o en los teoremas 3.3.9, 3.3.11, 3.3.16, 3.3.17.

Cabe mencionar que las extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio, son precisamente las que satisfacen

la condición (a) del teorema precedente. Es claro, además, que las mismas son de clase de Cartan \mathbb{D}_n , o bien de clase de Cartan \mathbb{E}_p , con $p = 6, 7, 8$. Las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n son exactamente las que verifican la condición (b). Mientras que las extensiones triviales que satisfacen la condición (c) son: extensiones triviales de clase de Cartan $\mathbb{E}_6, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_7$ ó \mathbb{E}_8 con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo P (corolarios 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.9, respectivamente) o bien aquéllas tales que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos (teoremas 3.3.9, 3.3.11, 3.3.16, 3.3.17, respectivamente).

En el Capítulo 4 probamos usando los resultados del Capítulo 3, el Teorema [HW] y el Teorema [AHR] los teoremas de clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$ y \mathbb{E}_6 dados por distintos autores. Con las mismas técnicas, se indica cómo obtener las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 , clasificadas por B. Roggon [Ro]. Por último, presentamos un resultado de I. Assem, J. Nöhrling y A. Skowroński sobre extensiones triviales domésticas de álgebras simplemente conexas y damos algunos ejemplos que ilustran cómo utilizar el resultado indicado y las técnicas desarrolladas en este trabajo en el estudio de las álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$.

Preliminares

Sea k un cuerpo. Una k -álgebra Λ se dice **básica** si en la descomposición $\Lambda = \coprod P_i$, de Λ como suma de Λ -módulos proyectivos indescomponibles, $P_i \not\cong P_j$ para $i \neq j$.

Para una k -álgebra Λ , notaremos con $\text{Mod } \Lambda$ a la categoría de Λ -módulos, con $\text{mod } \Lambda$ a la subcategoría llena de $\text{Mod } \Lambda$ de Λ -módulos finitamente generados y con $\text{ind } \Lambda$ a la subcategoría llena de $\text{mod } \Lambda$ cuyos objetos son representantes no isomorfos de los Λ -módulos indescomponibles finitamente generados.

Vale el siguiente teorema, debido a P. Gabriel:

Teorema (Gabriel). *Para toda k -álgebra Λ de dimensión finita existe una única (a menos de isomorfismos) k -álgebra Λ' de dimensión finita y básica tal que las categorías $\text{mod } \Lambda$ y $\text{mod } \Lambda'$ de Λ y Λ' -módulos finitamente generados, respectivamente, son equivalentes (es decir, son Morita equivalentes).*

De acuerdo a este resultado, si Λ es una k -álgebra de dimensión finita, para estudiar la categoría $\text{mod } \Lambda$ es posible suponer, sin pérdida de generalidad, que Λ es básica.

En este trabajo, todas las álgebras serán básicas, indescomponibles y de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k fijo. La palabra **ideal** significará “ideal bilátero”. Para un álgebra Λ , denotaremos con $\text{rad } \Lambda$, o bien simplemente \mathfrak{r} , al radical de Jacobson de Λ . Por un Λ -módulo entenderemos un Λ -módulo a izquierda. Sabemos que si Λ es una k -álgebra y M un Λ -módulo, el radical de M coincide con $(\text{rad } \Lambda)M$, que denotaremos con $\mathfrak{r}M$.

Es bien sabido que toda álgebra Λ básica, indescomponible y de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , es isomorfa al cociente kQ_Λ/I del álgebra de caminos kQ_Λ , donde Q_Λ es un diagrama finito y conexo, e I es un ideal admisible de kQ_Λ . Recordemos que un ideal I de kQ_Λ es admisible si $\mathfrak{r}^n(kQ_\Lambda) \subset I \subset \mathfrak{r}^2(kQ_\Lambda)$ para algún entero n , donde $\mathfrak{r}(kQ_\Lambda)$ coincide con el ideal generado por todas las flechas de kQ_Λ . En adelante, todas las relaciones serán admisibles, es decir, $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ significará siempre que I es un ideal admisible.

Se llama **diagrama ordinario** de Λ al diagrama Q_Λ con un número mínimo de vértices tal que $kQ_\Lambda/I \simeq \Lambda$, para algún ideal admisible I .

Para un diagrama Q dado, indicaremos con $|Q|$ al grafo no orientado de Q . Notaremos con Q_0 al conjunto de vértices de Q y con Q_1 al conjunto de flechas de Q . Si α es una flecha de

Q_1 , $s(\alpha)$ y $e(\alpha)$ denotarán, respectivamente, a los vértices origen y final de α . Un camino es una sucesión de flechas $p = \alpha_n \dots \alpha_1$, con $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t < n$, o bien, el símbolo e_i para $i \in Q_0$. Llamaremos caminos triviales a los caminos e_i y definimos $s(e_i) = e(e_i) = i$. Para un camino no trivial $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ definimos $s(p) = s(\alpha_1)$ y $e(p) = e(\alpha_n)$. Un camino no trivial p se dice un ciclo orientado si $s(p) = e(p)$.

Si $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ es un álgebra e $i \in (Q_\Lambda)_0$, notaremos con S_i al Λ -módulo simple asociado a i y con P_i e I_i a las cápsulas proyectiva e inyectiva de S_i , respectivamente.

Dado un diagrama Q , se dice que un subdiagrama Q' de Q es lleno si para todo par de vértices x e y de $(Q')_0$, las flechas de x a y en Q' coinciden con las flechas de x a y en Q .

Sucesiones y Gráfico de Auslander – Reiten

En los años '70, M. Auslander e I. Reiten introdujeron la noción de sucesión que casi se parte (actualmente llamadas también sucesiones de Auslander – Reiten). Además de la importancia teórica de las mismas, los morfismos que componen estas sucesiones se utilizan para definir el gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra Λ .

Daremos aquí las nociones y resultados principales, que pueden verse en [AuRS].

Definición. Una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

en $\text{mod } \Lambda$ se dice una sucesión de Auslander – Reiten si:

- i) A y C son indescomponibles
- ii) La sucesión no se parte.
- iii) Para todo morfismo $h : X \rightarrow C$, que no es un epimorfismo que se parte, existe $h' : X \rightarrow B$ tal que $g h' = h$.

Observación. Las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes a (i), (ii), (iii'), donde:

- iii') Dado un morfismo $h : A \rightarrow X$, que no es un monomorfismo que se parte, existe $h' : B \rightarrow X$ tal que $h' f = h$.

El siguiente resultado muestra la unicidad de las sucesiones de Auslander – Reiten.

Proposición. Si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0$ son sucesiones de Auslander – Reiten, entonces $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$. Más aún, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & = \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cuando A es inyectivo o C es proyectivo, toda sucesión $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ se parte, de modo que no existe sucesión de Auslander – Reiten.

En el teorema que enunciaremos ahora, veremos que excluyendo estos casos siempre existe una sucesión de Auslander – Reiten y además describiremos a A en función de C y recíprocamente. Para ello es necesario recordar la noción de traspuesta.

Sea M un Λ -módulo y $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva minimal de M . Esto es, la sucesión $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es exacta, P_0 es la cápsula proyectiva de M y P_1 es la cápsula proyectiva de $\text{Ker}(P_0 \rightarrow M)$. Sea $*$ = $\text{Hom}_\Lambda(\ , \Lambda)$. Si X es un Λ -módulo, X^* es un Λ^{op} -módulo, poniendo $(f \lambda)(m) = f(m) \lambda$, si $f \in X^*$, $\lambda \in \Lambda$ y $m \in X$. Definimos la traspuesta de M , que denotamos $\text{Tr } M$, como el conúcleo de la aplicación $f^* : P_0^* \rightarrow P_1^*$. La estructura de Λ^{op} -módulo de P_0^* y P_1^* induce en $\text{Tr } M$ una estructura de Λ^{op} -módulo.

Teorema. *Dado un Λ -módulo indescomponible no inyectivo A (no proyectivo C) existe una sucesión de Auslander – Reiten $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y además:*

- i) $A \simeq D \text{Tr } C$
- ii) $C \simeq \text{Tr } D A$

El teorema y la proposición anterior nos dicen que la sucesión de Auslander – Reiten es un invariante del Λ -módulo no inyectivo A (no proyectivo C).

Vamos a dar ahora los conceptos de morfismo pozo (“*minimal right almost split map*”) y de morfismo fuente (“*minimal left almost split map*”).

Definición. Sea C un módulo indescomponible.

- i) Un morfismo $g : B \rightarrow C$ se dice un pozo en C si se verifican las siguientes condiciones:
 - (a) g no es un epimorfismo que se parte.
 - (b) Para todo $h : B \rightarrow B$ tal que $gh = g$, h es un automorfismo.
 - (c) Para todo $h : X \rightarrow C$ que no es un epimorfismo que se parte, existe $h' : X \rightarrow B$ tal que $gh' = h$.
- ii) Un morfismo $f : C \rightarrow E$ se dice una fuente en C si se verifican las siguientes condiciones:
 - (a) f no es un monomorfismo que se parte.
 - (b) Para todo $h : E \rightarrow E$ tal que $hf = f$, h es un automorfismo.
 - (c) Para todo $h : C \rightarrow X$ que no es un monomorfismo que se parte, existe $h' : E \rightarrow X$ tal que $h'f = h$.

Proposición. *Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una sucesión de Auslander – Reiten, entonces f es una fuente y g es un pozo.*

Proposición. Sea C un Λ -módulo indescomponible. Entonces:

- i) Si C no es proyectivo y $g : B \rightarrow C$ es un pozo, entonces g es un epimorfismo y $0 \rightarrow \text{Ker } g \rightarrow B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ es una sucesión de Auslander - Reiten.
- ii) Si C no es inyectivo y $f : C \rightarrow E$ es una fuente, entonces f es un monomorfismo y $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} E \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ es una sucesión de Auslander - Reiten.

Tenemos la siguiente observación:

Observación.

- i) Sea P un módulo proyectivo indescomponible no simple, entonces la inclusión $i : \text{r}P \rightarrow P$ es un pozo y todo otro pozo en P es isomorfo a i .
- ii) Sea I un módulo inyectivo indescomponible no simple, entonces la proyección $\pi : I \rightarrow I/\text{soc } I$ es una fuente y toda otra fuente en I es isomorfa a π .

Otro tipo importante de aplicaciones son las aplicaciones irreducibles. Recordamos ahora este concepto.

Definición. Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\text{mod } \Lambda$ se dice irreducible si:

- i) f no se parte.
- ii) Para todo diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ h \nearrow & & \searrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

h es un monomorfismo que se parte, o bien g es un epimorfismo que se parte.

Observación. Si $f : A \rightarrow B$ es irreducible, entonces f es un epimorfismo o un monomorfismo.

La siguiente proposición muestra la relación entre los morfismos irreducibles, los morfismos pozo y los morfismos fuente.

Proposición.

- i) Sea C un Λ -módulo indescomponible. Entonces un morfismo $g : B \rightarrow C$ es irreducible si, y sólo si, existe un morfismo $g' : B' \rightarrow C$ tal que el morfismo inducido $(g, g') : B \amalg B' \rightarrow C$ es un pozo en C .
- ii) Sea A un Λ -módulo indescomponible. Entonces un morfismo $g : A \rightarrow B$ es irreducible si, y sólo si, existe un morfismo $g' : A \rightarrow B'$ tal que el morfismo inducido $\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} : A \rightarrow B \amalg B'$ es una fuente en A .

En este trabajo haremos uso del siguiente resultado, que da la estructura de las sucesiones de Auslander – Reiten cuyo término medio tiene un sumando no nulo proyectivo – inyectivo.

Proposición. *Las sucesiones de Auslander – Reiten con un módulo proyectivo – inyectivo en el término medio son de la forma: $0 \rightarrow rP \rightarrow P \amalg rP/\text{soc } P \rightarrow rP/\text{soc } P \rightarrow 0$, donde P es un módulo indescomponible proyectivo – inyectivo y no simple.*

Sean A, B en $\text{mod } \Lambda$. A continuación definiremos, para $n \geq 1$ los subconjuntos $\text{rad}^n(A, B)$ de $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ inductivamente, como sigue:

i) Para $n = 1$, $\text{rad}^1(A, B) = \text{rad}(A, B) = \{f \in \text{Hom}_\Lambda(A, B) : hf g \text{ no es un isomorfismo cualquiera sea } g : X \rightarrow A \text{ y } h : B \rightarrow X, \text{ con } X \text{ en } \text{ind } \Lambda\}$.

Es un hecho conocido que $\text{rad}(A, B)$ es un submódulo de $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$.

ii) $\text{rad}^n(A, B) = \{f \in \text{Hom}_\Lambda(A, B) : \text{existe } X \text{ en } \text{mod } \Lambda \text{ y morfismos } g \in \text{rad}(A, X) \text{ y } h \in \text{rad}^{n-1}(X, B) \text{ con } f = hg\}$.

El siguiente resultado muestra la conexión entre morfismos irreducibles y el radical.

Proposición. *Sean A, B Λ -módulos indescomponibles. Un morfismo $f : A \rightarrow B$ es irreducible si, y sólo si, $f \in \text{rad}(A, B) - \text{rad}^2(A, B)$.*

Vamos a definir ahora la noción de gráfico de Auslander – Reiten.

Definición. Sea Λ un álgebra. El gráfico de Auslander – Reiten Γ_Λ de Λ se define como sigue:

i) Los vértices están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfismos de los Λ -módulos indescomponibles, esto es, a cada módulo indescomponible M se le asocia un vértice $[M]$ y los vértices $[M]$ y $[M']$ son los mismos si, y sólo si, $M \simeq M'$.

ii) El número de flechas de $[M]$ en $[M']$ está dado por la dimensión del espacio vectorial $\text{rad}(M, M')/\text{rad}^2(M, M')$.

Observación.

i) Γ_Λ no tiene lazos. En efecto, en caso contrario, existiría una aplicación irreducible de un vértice en sí mismo, lo cual es una contradicción.

ii) Γ_Λ es localmente finito, es decir, para cada vértice $[M]$ el número de flechas que salen y llegan a $[M]$ es finito.

iii) Los vértices correspondientes a módulos proyectivos se llaman **vértices proyectivos** y aquéllos correspondientes a módulos inyectivos se dicen **vértices inyectivos**. Se tiene una aplicación biyectiva entre el conjunto de vértices no proyectivos y el conjunto de vértices no inyectivos, inducida por $D \text{Tr}$. Esta aplicación se llama **traslación** y se denota $D \text{Tr}$, o bien τ . Además, si M es un Λ -módulo indescomponible no proyectivo, entonces el número de flechas que salen de $[D \text{Tr} M]$ es igual al número de flechas que llegan a $[M]$.

Vamos a introducir ahora la noción de componente en $\text{ind } \Lambda$. Se dice que dos módulos A y B en $\text{ind } \Lambda$ están en relación si existe un morfismo irreducible $f : A \rightarrow B$. Consideremos la relación de equivalencia generada por la relación dada. Se denomina **componente** a cada clase de equivalencia, luego A y B están en la misma componente si, y sólo si, existe un número natural n , módulos indescomponibles x_i para $i = 1, \dots, n$, y para cada i un morfismo irreducible $f_i : x_i \rightarrow x_{i+1}$, o bien un morfismo irreducible $g_i : x_{i+1} \rightarrow x_i$, con $x_1 = A$ y $x_n = B$.

El gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra se descompone en componentes conexas, definiremos aquí algunas de esas componentes.

Definición. Una componente conexa C del gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra Λ se dice **preproyectiva** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Si $A \in C$, entonces $(D \text{Tr})^n A$ es proyectivo, para algún entero no negativo n .
- ii) C no tiene ciclos orientados.

Dualmente, se tiene:

Definición. Una componente conexa C del gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra Λ se dice **preinyectiva** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Si $B \in C$, entonces $(\text{Tr} D)^n B$ es inyectivo, para algún entero no negativo n .
- ii) C no tiene ciclos orientados.

Capítulo 1

Diagrama y relaciones de la extensión trivial de un álgebra schurian

Recordemos que un álgebra Λ se dice *schurian* si $\dim_k(\text{Hom}_\Lambda(P, Q)) \leq 1$, cualesquiera sean P y Q , Λ -módulos proyectivos indescomponibles. En este capítulo describiremos el diagrama ordinario y las relaciones de la extensión trivial de un álgebra Λ , en el caso en que Λ es schurian.

En la Sección 1.1 presentamos algunos resultados básicos sobre extensiones triviales. La Sección 1.2 y la Sección 1.3 están dedicadas a dar la descripción mencionada y a ilustrar la misma con algunos ejemplos. El capítulo concluye con el estudio de una aplicación de los resultados vistos en las secciones precedentes.

1.1 Extensión trivial de un álgebra

Definición 1.1.1. Sea Λ una k -álgebra y $D(\Lambda) = \text{Hom}_k(\Lambda, k)$ el dual de Λ , con la siguiente estructura de $\Lambda - \Lambda$ bimódulo:

$$(\lambda f)(\mu) = f(\mu \lambda), \quad (f \lambda)(\mu) = f(\lambda \mu) \quad \text{para } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ y } f \in D(\Lambda).$$

La extensión trivial $T(\Lambda) = \Lambda \rtimes D(\Lambda)$ de Λ por $D(\Lambda)$ es el álgebra cuya estructura de k -espacio vectorial es la de $\Lambda \amalg D(\Lambda)$ y donde la multiplicación está dada por:

$$(\lambda, f)(\mu, g) = (\lambda \mu, \lambda g + f \mu) \quad \text{para } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ y } f, g \in D(\Lambda).$$

Daremos en la siguiente proposición algunas propiedades básicas, que nos serán de utilidad en lo que sigue. Si bien la demostración es elemental, se incluye aquí por razones de claridad.

Proposición 1.1.2. *Sea Λ una k -álgebra, entonces:*

- i) $\text{rad } T(\Lambda) = (\mathfrak{r}, D(\Lambda)) = \{(\lambda, f) : \lambda \in \mathfrak{r}, f \in D(\Lambda)\}$, donde $\mathfrak{r} = \text{rad } \Lambda$.

ii) $\text{rad}^2 T(\Lambda) = (\mathfrak{r}^2, \mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})$.

iii) $\text{rad} T(\Lambda)/\text{rad}^2 T(\Lambda)$ y $(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2, D(\Lambda)/(\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}))$ son isomorfos como k -espacios vectoriales.

Demostración:

i) Como $(0, D(\Lambda))^2 = 0$ y $(\mathfrak{r}, 0)$ es un ideal nilpotente, se tiene que $\text{rad} T(\Lambda) \supset (\mathfrak{r}, D(\Lambda))$. Por otra parte, el anillo $T(\Lambda)/(\mathfrak{r}, D(\Lambda))$ es isomorfo a Λ/\mathfrak{r} que es semisimple, en consecuencia $\text{rad} T(\Lambda) \subset (\mathfrak{r}, D(\Lambda))$.

ii) Sean $(\lambda, f), (\mu, g) \in \text{rad} T(\Lambda)$. Luego

$$(\lambda, f)(\mu, g) = (\lambda\mu, \lambda g + f\mu) \in (\mathfrak{r}^2, \mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}),$$

de donde resulta que $\text{rad}^2 T(\Lambda) \subset (\mathfrak{r}^2, \mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})$.

Sea ahora $(\lambda, h) \in (\mathfrak{r}^2, \mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})$. Entonces los elementos h y λ pueden escribirse como:

$$h = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i + g_i \mu'_i \quad \text{y} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'_i,$$

respectivamente, donde $\lambda_i, \lambda'_i, \mu_i, \mu'_i \in \mathfrak{r} = \text{rad} \Lambda$ y $f_i, g_i \in D(\Lambda)$. De aquí:

$$(\lambda, 0) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i, 0)(\lambda'_i, 0) \quad \text{y} \quad (0, h) = \sum_{i=1}^m (\mu_i, 0)(0, f_i) + (0, g_i)(\mu'_i, 0)$$

y por lo tanto, pertenecen al ideal $\text{rad}^2 T(\Lambda)$. Se sigue entonces que

$$(\lambda, h) = (\lambda, 0) + (0, h) \in \text{rad}^2 T(\Lambda).$$

iii) Sea $\phi : \text{rad} T(\Lambda) \rightarrow (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2, D(\Lambda)/(\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}))$ la transformación lineal definida por $\phi(\lambda, f) = (\bar{\lambda}, \bar{f})$. Aquí $\bar{\lambda}$ denota la clase de λ -módulo \mathfrak{r}^2 y \bar{f} indica la clase de f -módulo $\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}$. Es fácil ver que ϕ es un epimorfismo y que $\ker \phi = \text{rad}^2 T(\Lambda)$. Luego, existe un isomorfismo

$$\bar{\phi} : \text{rad} T(\Lambda)/\text{rad}^2 T(\Lambda) \rightarrow (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2, D(\Lambda)/(\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})). \quad \blacksquare$$

La aplicación $t : T(\Lambda) \rightarrow D(T(\Lambda))$, definida por $t(\lambda, f)(\mu, g) = f(\mu) + g(\Lambda)$, es un isomorfismo de $T(\Lambda) - T(\Lambda)$ bimódulos, lo cual muestra que $T(\Lambda)$ es un álgebra simétrica y por lo tanto, autoinyectiva.

Por otra parte, la aplicación $\pi : T(\Lambda) \rightarrow \Lambda$; $\pi(\lambda, f) = \lambda$, para $\lambda \in \Lambda$ y $f \in D(\Lambda)$ es un epimorfismo de k -álgebras con núcleo $(0, D(\Lambda))$. Luego, π induce una inclusión canónica de $\text{mod} \Lambda$ en $\text{mod} T(\Lambda)$ que permite identificar la categoría $\text{mod} \Lambda$ con la subcategoría llena de $\text{mod} T(\Lambda)$ cuyos objetos son los $T(\Lambda)$ -módulos M tales que $(0, D(\Lambda)) M = 0$.

1.2 El diagrama ordinario de $T(\Lambda)$

En esta sección describiremos el diagrama ordinario de la extensión trivial $T(\Lambda)$ de un álgebra schurian $\Lambda = kQ_\Lambda/I$.

En lo que sigue, si $x \in kQ_\Lambda$, notaremos con \bar{x} al elemento correspondiente en Λ . Un camino p en Q_Λ se llamará **maximal** si $\bar{p} \neq 0$ y $\bar{\alpha}p = 0 = \bar{p}\alpha$, para toda flecha $\alpha \in Q_\Lambda$.

El siguiente lema será de suma utilidad para nuestro propósito:

Lema 1.2.1. *Sea $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ un álgebra schurian. Entonces $\dim_k \left(D(\Lambda) / (\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}) \right)$ es igual a la dimensión del k -espacio vectorial generado por los elementos \bar{p} en Λ , donde p es un camino maximal.*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_t, \bar{p}_{t+1}, \dots, \bar{p}_m\}$ una k -base de Λ , formada por caminos y ordenada de modo tal que para $i = 1, \dots, t$, p_i es un camino maximal de Q_Λ , mientras que los restantes elementos de \mathcal{B} corresponden a caminos no maximales. Consideremos

$$\mathcal{B}^* = \{\bar{p}_1^*, \dots, \bar{p}_t^*, \bar{p}_{t+1}^*, \dots, \bar{p}_m^*\} \subset D(\Lambda),$$

la base dual de \mathcal{B} , es decir, para cada $i = 1, \dots, m$, $\bar{p}_i^*(\bar{p}_i) = 1$ y $\bar{p}_i^*(\bar{p}_j) = 0$ si $i \neq j$. El lema quedará demostrado si probamos que las imágenes de $\bar{p}_1^*, \dots, \bar{p}_t^*$ en $D(\Lambda) / (\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})$ forman una base del mismo.

En primer lugar, veamos que para $t < i \leq m$ se verifica $\bar{p}_i^* \in \mathfrak{r} D(\Lambda)$, o bien $\bar{p}_i^* \in D(\Lambda) \mathfrak{r}$. En efecto, para cada $i = t+1, \dots, m$, p_i no es un camino maximal, lo que implica que existe una flecha α_i tal que $\bar{p}_i \alpha_i \neq 0$, o bien $\bar{\alpha}_i \bar{p}_i \neq 0$. Supongamos que $\bar{p}_i \alpha_i \neq 0$. Puesto que Λ es un álgebra schurian se verifica que $\bar{p}_i \alpha_i = a_{i,j} \bar{p}_j$ con $0 \neq a_{i,j} \in k$ para algún $j = 1, \dots, m$. Luego:

$$(\bar{\alpha}_i \bar{p}_j^*)(\bar{p}_i) = \bar{p}_j^*(\bar{p}_i \alpha_i) = \bar{p}_j^*(a_{i,j} \bar{p}_j) = a_{i,j} = a_{i,j} \bar{p}_i^*(\bar{p}_i).$$

Además, si $s \neq i$, entonces:

$$(\bar{\alpha}_i \bar{p}_j^*)(\bar{p}_s) = \bar{p}_j^*(\bar{p}_s \alpha_i) = 0,$$

pues en caso contrario, $\bar{p}_s \alpha_i = b \bar{p}_j = b a_{i,j}^{-1} \bar{p}_i \alpha_i$, donde $0 \neq b \in k$. Dado que Λ es schurian, se sigue que $\bar{p}_s = c \bar{p}_i$, con $c \in k$, lo cual es una contradicción, pues \bar{p}_s y \bar{p}_i son linealmente independientes. Tenemos entonces que $a_{i,j} \bar{p}_i^* = \bar{\alpha}_i \bar{p}_j^*$ y en consecuencia $\bar{p}_i^* \in \mathfrak{r} D(\Lambda)$. Análogamente se prueba que si $\bar{\alpha}_i \bar{p}_i \neq 0$, entonces $\bar{p}_i^* \in D(\Lambda) \mathfrak{r}$.

Por lo tanto las imágenes de $\bar{p}_1^*, \dots, \bar{p}_t^*$ en $D(\Lambda) / (\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})$ forman un conjunto de generadores de este espacio vectorial.

Por otro lado, si

$$\sum_{i=1}^t a_i \bar{p}_i^* = 0 \pmod{(\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r})},$$

donde cada $a_i \in k$, entonces:

$$\sum_{i=1}^t a_i \bar{p}_i^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i + g_i \mu_i,$$

con $\lambda_i, \mu_i \in \mathfrak{r}$ y $f_i, g_i \in D(\Lambda)$. Luego, para $j = 1, \dots, t$:

$$a_j = \sum_{i=1}^t a_i \bar{p}_i^*(\bar{p}_j) = \sum_{i=1}^l (\lambda_i f_i)(\bar{p}_j) + (g_i \mu_i)(\bar{p}_j) = \sum_{i=1}^l f_i(\bar{p}_j \lambda_i) + g_i(\mu_i \bar{p}_j).$$

Ahora bien, como cada p_j es un camino maximal y $\lambda_i, \mu_i \in \mathfrak{r}$, se tiene:

$$\bar{p}_j \lambda_i = 0 = \mu_i \bar{p}_j, \quad \text{para } i = 1, \dots, l \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, t$$

y en consecuencia $a_j = 0$ para todo j , lo cual completa la demostración. \blacksquare

Nos encontramos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección:

Teorema 1.2.2. *Si $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ es un álgebra schurian, entonces el diagrama ordinario de $T(\Lambda)$ está dado por:*

- i) $(Q_{T(\Lambda)})_0 = (Q_\Lambda)_0$.
- ii) $(Q_{T(\Lambda)})_1 = (Q_\Lambda)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \dots, \beta_{p_t}\}$, donde $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_t\}$ es un conjunto formado por caminos maximales, linealmente independiente maximal en Λ . Además, para cada i , β_{p_i} es una flecha tal que $s(\beta_{p_i}) = e(p_i)$ y $e(\beta_{p_i}) = s(p_i)$.

Demostración:

- i) Consideremos $(Q_\Lambda)_0 = \{1, \dots, n\}$, el conjunto de vértices de Q_Λ y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ el conjunto de los caminos triviales en kQ_Λ . Un simple cálculo muestra que $\{(\bar{e}_1, 0), \dots, (\bar{e}_n, 0)\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de $T(\Lambda)$. Se tiene entonces que $Q_{T(\Lambda)}$ tiene n vértices numerados de 1 a n en correspondencia uno a uno con $(\bar{e}_1, 0), \dots, (\bar{e}_n, 0)$.

- ii) Para cada par de enteros i, j , donde $1 \leq i, j \leq n$, el número de flechas del vértice i al vértice j es igual a

$$\dim_k \left((\bar{e}_j, 0) \text{ rad } T(\Lambda) / \text{rad}^2 T(\Lambda) (\bar{e}_i, 0) \right).$$

De la Proposición 1.1.2 se sigue que

$$\begin{aligned} \dim_k \left((\bar{e}_j, 0) \text{ rad } T(\Lambda) / \text{rad}^2 T(\Lambda) (\bar{e}_i, 0) \right) = \\ \dim_k \left(\bar{e}_j \mathfrak{r} / \mathfrak{r}^2 \bar{e}_i \right) + \dim_k \left(\bar{e}_j D(\Lambda) / (\mathfrak{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathfrak{r}) \bar{e}_i \right) \end{aligned}$$

El primer sumando del segundo miembro es igual al número de flechas del vértice i al vértice j en Q_Λ y este número es cero o uno, pues Λ es schurian. Por otra parte, del Lema 1.2.1 se sigue que

$$\dim_k \left(\overline{e_j} D(\Lambda) / (\mathbf{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathbf{r}) \overline{e_i} \right) = 0$$

si no hay caminos maximales de j en i , o bien, en caso contrario:

$$\dim_k \left(\overline{e_j} D(\Lambda) / (\mathbf{r} D(\Lambda) + D(\Lambda) \mathbf{r}) \overline{e_i} \right) = 1$$

Más aún, se deduce que

$$\dim_k \left((\overline{e_j}, 0) \text{ rad } T(\Lambda) / \text{rad}^2 T(\Lambda) (\overline{e_i}, 0) \right) = 2$$

si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:

- (a) Existe una flecha en Q_Λ del vértice i al vértice j .
- (b) Existe un camino maximal del vértice j al vértice i .

Por lo tanto, a cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_Λ le corresponde una flecha de i a j en $Q_{T(\Lambda)}$, que denotaremos también con α y si $\{\overline{p_1}, \dots, \overline{p_t}\}$ es un conjunto de caminos maximales linealmente independientes en Λ , cada uno de ellos induce una flecha $\beta_{p_i} : e(p_i) \rightarrow s(p_i)$ en $Q_{T(\Lambda)}$.

Concluimos que $(Q_{T(\Lambda)})_1 = (Q_\Lambda)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \dots, \beta_{p_t}\}$, donde $\{\overline{p_1}, \dots, \overline{p_t}\}$ es un conjunto linealmente independiente maximal en Λ formado por caminos maximales y además, para cada i , β_{p_i} es una flecha tal que $s(\beta_{p_i}) = e(p_i)$ y $e(\beta_{p_i}) = s(p_i)$. ■

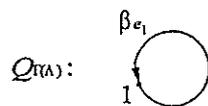
Como consecuencia inmediata del teorema anterior, se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 1.2.3. *Toda flecha de $Q_{T(\Lambda)}$ pertenece, al menos, a un ciclo orientado.*

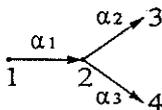
Demostración: Sabemos que $(Q_{T(\Lambda)})_1 = (Q_\Lambda)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \dots, \beta_{p_t}\}$. Claramente, cada flecha β_{p_i} , $i = 1, \dots, t$ forma parte del ciclo $\beta_{p_i} p_i$. Sea $\alpha \in (Q_\Lambda)_1$ y p un camino maximal en Q_Λ tal que α es una de sus flechas. El elemento \overline{p} es múltiplo no nulo de algún $\overline{p_j}$, digamos $\overline{p} = a \overline{p_j}$, con $0 \neq a \in k$. Por lo tanto, α forma parte del ciclo orientado $\beta_{p_j} p$. ■

Los ejemplos siguientes ilustran la descripción precedente:

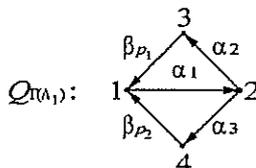
Ejemplo 1.2.4. Sea Λ tal que $\dim_k \Lambda = 1$. Entonces es claro que



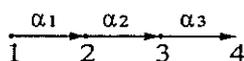
Ejemplo 1.2.5. Sea Λ_1 el álgebra dada por el diagrama Q :



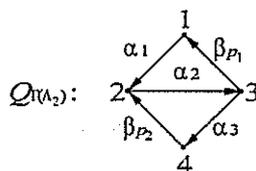
Los únicos caminos maximales en Λ_1 son $p_1 = \alpha_2 \alpha_1$ y $p_2 = \alpha_3 \alpha_1$, asociadas a ellos se tienen las flechas $\beta_{p_1} : 3 \rightarrow 1$ y $\beta_{p_2} : 4 \rightarrow 1$ en $Q_{T(\Lambda_1)}$, respectivamente, y puesto que Q es un subdiagrama de $Q_{T(\Lambda_1)}$, concluimos que:



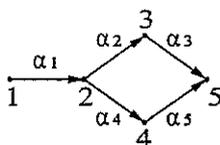
Ejemplo 1.2.6. Sea Λ_2 el álgebra dada por el diagrama Q :



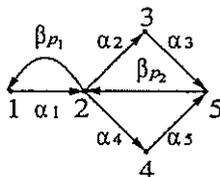
con la relación $\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 = 0$. Tenemos que $p_1 = \alpha_2 \alpha_1$, $p_2 = \alpha_3 \alpha_2$ son los caminos maximales en kQ , además $\{\overline{p_1}, \overline{p_2}\}$ es un conjunto linealmente independiente. Por consideraciones similares a las del ejemplo anterior, se deduce que



Ejemplo 1.2.7. Sea Λ_3 dada por el diagrama:



con relaciones: $\alpha_3 \alpha_2 = \alpha_5 \alpha_4$, $\alpha_2 \alpha_1 = 0$, $\alpha_4 \alpha_1 = 0$. En este caso los caminos maximales son $p_1 = \alpha_1$, $p_2 = \alpha_3 \alpha_2$ y $p_3 = \alpha_5 \alpha_4$. Como $\overline{p_2} = \overline{p_3}$ el diagrama de $T(\Lambda_3)$ se obtiene de Q agregando las flechas $\beta_{p_1} : 2 \rightarrow 1$, $\beta_{p_2} : 5 \rightarrow 2$. Es decir, $Q_{T(\Lambda_3)}$ es



Los ejemplos 1.2.5 y 1.2.6 muestran que si bien $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, las álgebras $T(\Lambda_1)$ y $T(\Lambda_2)$ tienen el mismo diagrama. Más aún, veremos en la próxima sección que $T(\Lambda_1) \simeq T(\Lambda_2)$.

1.3 Descripción de las relaciones

En esta sección describiremos las relaciones de $T(\Lambda)$ cuando Λ es un álgebra schurian. En lo que sigue, sea $\mathcal{M} = \{\overline{p_1}, \dots, \overline{p_t}\}$ un conjunto fijo formado por caminos maximales y linealmente independiente maximal en Λ . Es conveniente para nuestro propósito introducir las siguientes definiciones:

Definición 1.3.1. Diremos que un ciclo orientado C de $Q_{T(\Lambda)}$ es elemental si se verifica que $C = \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_1$, donde $p_i \in \mathcal{M}$, $\alpha_n \cdots \alpha_1$ es un camino maximal en Q_Λ y $\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1} = a \overline{p_i}$, con $0 \neq a \in k$.

Notemos que la longitud de un ciclo elemental es por lo menos dos, salvo que $\dim_k \Lambda = 1$.

Definición 1.3.2. Diremos que un camino q de $Q_{T(\Lambda)}$ admite suplemento si está compuesto por flechas de un ciclo elemental C de longitud mayor o igual que la de q . En tal caso, llamaremos suplemento de q en C al camino trivial $e_{s(q)}$ si $s(q) = e(q)$ o en caso contrario, al camino formado por las restantes flechas de C .

Ejemplo 1.3.3. Sea Λ_3 el álgebra dada en el ejemplo 1.2.7. Entonces $C_1 = \beta_{p_1} \alpha_1$, $C_2 = \beta_{p_2} \alpha_3 \alpha_2$, $C_3 = \beta_{p_2} \alpha_5 \alpha_4$ son los ciclos elementales de $Q_{T(\Lambda_3)}$.

El suplemento de β_{p_2} en el ciclo elemental C_3 es $\alpha_5 \alpha_4$.

Los caminos $\alpha_1 \beta_{p_1}$, $C_2 = \beta_{p_2} \alpha_3 \alpha_2$, $C_3 = \beta_{p_2} \alpha_5 \alpha_4$ admiten por suplemento en C_1 , C_2 y C_3 , respectivamente, al camino trivial e_2 .

Teorema 1.3.4. Sea $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ un álgebra schurian, donde I es un ideal admisible de kQ_Λ . Sea $I_{T(\Lambda)}$ el ideal de $kQ_{T(\Lambda)}$ generado por:

- i) Los caminos formados por $n + 1$ flechas de un ciclo elemental de longitud n .
- ii) Los caminos cuyas flechas no pertenecen a un mismo ciclo elemental.
- iii) Los elementos $q - b q'$, donde q y q' son caminos con el mismo origen y el mismo vértice final que verifican una de las siguientes condiciones:

(a) $\overline{q} = b \overline{q'}$, con $0 \neq b \in k$, si q y q' son caminos en kQ_Λ , o bien:

(b) q y q' admiten el mismo suplemento γ en ciclos elementales

$$C = \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_1 \quad \text{y} \quad C' = \beta_{p_j} \alpha'_m \cdots \alpha'_1,$$

respectivamente, donde γ es un camino en kQ_Λ , $\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1} = a \overline{p_i}$ y $\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_1} = a' \overline{p_j}$, con $0 \neq a, a' \in k$ y $b = \frac{a}{a'}$.

Entonces $I_{T(\Lambda)}$ es admisible y $T(\Lambda) \simeq kQ_{T(\Lambda)}/I_{T(\Lambda)}$.

Para demostrar el teorema, consideremos el morfismo de k -álgebras $\Phi : kQ_{T(\Lambda)} \rightarrow T(\Lambda)$ definido sobre los caminos triviales y los caminos de longitud uno como sigue:

$$\begin{aligned}\Phi(e_i) &= (\bar{e}_i, 0) \quad (i = 1, \dots, n) \\ \Phi(\alpha) &= (\bar{\alpha}, 0) \\ \Phi(\beta_{p_i}) &= (0, \bar{p}_i^*)\end{aligned}$$

Las siguientes observaciones serán de utilidad:

Observación 1.3.5. $\Phi(q) = 0$ si q es un camino entre cuyas flechas aparecen por lo menos dos de la forma β_{p_i} . En efecto, como Φ es multiplicativa, basta probar que $\Phi(\beta_{p_j} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_{p_i}) = 0$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (Q_\Lambda)_1$. Aplicando la definición de Φ y la definición de multiplicación en $T(\Lambda)$ resulta:

$$\Phi(\beta_{p_j} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_{p_i}) = (0, \bar{p}_j^*)(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}, 0)(0, \bar{p}_i^*) = (0, \bar{p}_j^* \overline{\alpha_n \cdots \alpha_1})(0, \bar{p}_i^*) = (0, 0).$$

Observación 1.3.6. Sea $C = \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_1$ un ciclo elemental, donde $\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1} = a \bar{p}_i$, con $0 \neq a \in k$. Luego

$$\Phi(C) = (0, \bar{p}_i^*)(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}, 0) = (0, \bar{p}_i^* \overline{\alpha_n \cdots \alpha_1})$$

y como

$$\bar{p}_i^* \overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}(e_{s(\alpha_1)}) = \bar{p}_i^*(\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}) = a \neq 0,$$

entonces $\Phi(C) \neq 0$. Más aún, si $C_j = \alpha_{j-1} \cdots \alpha_1 \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_j$, para $2 < j \leq n$, se tiene de manera análoga que $\Phi(C_j) \neq 0$.

Observación 1.3.7. Es consecuencia inmediata de la observación anterior que si un camino q admite suplemento, entonces $\Phi(q) \neq 0$.

Observación 1.3.8. Sea γ en kQ_Λ suplemento del camino q en un ciclo elemental C y $\bar{\gamma}' = b \bar{\gamma}$, con $0 \neq b \in k$. Entonces γ' es suplemento de q . En efecto, sea $\gamma = \alpha_{l-1} \cdots \alpha_{k+1}$ en kQ_Λ suplemento de $q = \alpha_k \cdots \alpha_1 \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_l$ en el ciclo elemental $C = \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_1$. Se tiene entonces:

$$a \bar{p}_i = \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l \gamma \alpha_k \cdots \alpha_1} = \frac{1}{b} \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l \gamma' \alpha_k \cdots \alpha_1}$$

o sea: $a b \bar{p}_i = \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l \gamma' \alpha_k \cdots \alpha_1}$. De aquí resulta que $\alpha_n \cdots \alpha_l \gamma' \alpha_k \cdots \alpha_1$ es un camino maximal en Q_Λ y $\beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_l \gamma' \alpha_k \cdots \alpha_1$ es un ciclo elemental en $Q_{T(\Lambda)}$. Por lo tanto γ' es suplemento de q en el ciclo elemental $\beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_l \gamma' \alpha_k \cdots \alpha_1$.

Demostración: (del teorema 1.3.4) Sea Φ como arriba. Para probar el teorema basta mostrar que $\ker \Phi = I_{T(\Lambda)}$. Verificaremos en primer lugar que los generadores de $I_{T(\Lambda)}$ pertenecen a $\ker \Phi$:

i) Un camino q de longitud $n + 1$ en un ciclo minimal $C = \beta_p \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$ es de la forma:

$$q = \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_{n-1} \cdots \alpha_i \quad \text{o bien:} \quad q = \beta_p \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \beta_p.$$

En el primer caso:

$$\Phi(q) = (\overline{\alpha_i \cdots \alpha_1}, 0)(0, \overline{p^*})(\overline{\alpha_{n-1} \cdots \alpha_i}, 0) = (0, \overline{\alpha_i \cdots \alpha_1 p^* \alpha_{n-1} \cdots \alpha_i}).$$

Ahora bien, si u es un camino en kQ_Λ , entonces:

$$\overline{\alpha_i \cdots \alpha_1 p^* \alpha_{n-1} \cdots \alpha_i}(u) = \overline{p^* (\alpha_{n-1} \cdots \alpha_i u \alpha_i \cdots \alpha_1)},$$

pero como Λ es schurian, $\overline{\alpha_i u \alpha_i} = 0$ y de aquí: $\Phi(q) = 0$.

Si, en cambio $q = \beta_p \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \beta_p$ se tiene que $\Phi(q) = 0$, por la **Observación 1.3.5**.

- ii) Supongamos que $q = \gamma_n \cdots \gamma_1$ es un camino de longitud mayor o igual que dos, cuyas flechas no pertenecen a un mismo ciclo elemental. Si $\gamma_i \in (Q_\Lambda)_1$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $\overline{q} = 0$ en Λ . En efecto, si $\overline{q} \neq 0$ se tiene que el camino q es maximal o es parte de un camino maximal. Luego, las flechas de q están en un ciclo elemental, lo cual contradice nuestra suposición. En consecuencia $\Phi(q) = 0$.

Supongamos ahora que dos o más flechas de q son de la forma β_p . Se sigue de la **Observación 1.3.5** que $\Phi(q) = 0$.

Finalmente, si q contiene exactamente una flecha del tipo β_p , entonces

$$q = \gamma_n \cdots \gamma_{j+1} \beta_p \gamma_{j-1} \cdots \gamma_1$$

para algún $j = 1, \dots, n$. Luego:

$$\Phi(q) = (0, \overline{\gamma_n \cdots \gamma_{j+1} p^* \gamma_{j-1} \cdots \gamma_1})$$

y para todo camino u en kQ_Λ :

$$\overline{\gamma_n \cdots \gamma_{j+1} p^* \gamma_{j-1} \cdots \gamma_1}(u) = \overline{p^* (\gamma_{j-1} \cdots \gamma_1 u \gamma_n \cdots \gamma_{j+1})} = 0,$$

puesto que si fuera $\overline{\gamma_{j-1} \cdots \gamma_1 u \gamma_n \cdots \gamma_{j+1}} = a \overline{p}$, con $0 \neq a \in k$, entonces las flechas de q pertenecerían al ciclo $\beta_p \gamma_{j-1} \cdots \gamma_1 u \gamma_n \cdots \gamma_{j+1}$, contradiciendo nuestra suposición.

Notemos aquí que se sigue de (i), (ii) y de la **Observación 1.3.7** que un camino q admite suplemento si, y sólo si, $\Phi(q) \neq 0$.

- iii) Sean q y q' caminos en $kQ_{T(\Lambda)}$ con $s(q) = s(q')$, $e(q) = e(q')$. Supongamos en primer término que se verifica la condición (a). Entonces

$$\Phi(q) = (\overline{q}, 0) = (b \overline{q'}, 0) = b(\overline{q'}, 0) = b \Phi(q'),$$

de donde $q - b q' \in \ker \Phi$.

Si, en cambio, se verifica (b), sea γ en kQ_Λ suplemento de q y q' en los ciclos elementales C y C' , respectivamente. Entonces

$$C = \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_l \gamma \alpha_k \cdots \alpha_1 \quad \text{y} \quad C' = \beta_{p_j} \alpha'_m \cdots \alpha'_s \gamma \alpha'_r \cdots \alpha'_1,$$

luego, $q = \alpha_k \cdots \alpha_1 \beta_{p_i} \alpha_n \cdots \alpha_l$ y $q' = \alpha'_r \cdots \alpha'_1 \beta_{p_j} \alpha'_m \cdots \alpha'_s$ y por lo tanto:

$$\Phi(q) = (0, \overline{\alpha_k \cdots \alpha_1 p_i} \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l}) \quad \text{y} \quad \Phi(q') = (0, \overline{\alpha'_r \cdots \alpha'_1 p_j} \overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s}).$$

Sea u un camino arbitrario en kQ_Λ , se verifica:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_k \cdots \alpha_1 p_i} \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l(u)} &= \overline{p_i}^* (\overline{\alpha_n \cdots \alpha_l u \alpha_k \cdots \alpha_1}) \\ \overline{\alpha'_r \cdots \alpha'_1 p_j} \overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s(u)} &= \overline{p_j}^* (\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s u \alpha'_r \cdots \alpha'_1}). \end{aligned}$$

Cuando $s(u) \neq e(q)$, o bien $e(u) \neq s(q)$, resulta:

$$\alpha_n \cdots \alpha_l u \alpha_k \cdots \alpha_1 = 0 = \alpha'_m \cdots \alpha'_s u \alpha'_r \cdots \alpha'_1,$$

de donde:

$$\overline{p_i}^* (\overline{\alpha_n \cdots \alpha_l u \alpha_k \cdots \alpha_1}) = 0 = \overline{p_j}^* (\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s u \alpha'_r \cdots \alpha'_1}).$$

La igualdad anterior vale también si $\bar{u} = 0$. Sea pues, $s(u) = e(q)$, $e(u) = s(q)$ y $\bar{u} \neq 0$.

Dado que Λ es schurian: $\bar{u} = c\bar{\gamma}$, con c elemento no nulo en k . En consecuencia:

$$\begin{aligned} \overline{p_i}^* (\overline{\alpha_n \cdots \alpha_l u \alpha_k \cdots \alpha_1}) &= \overline{p_i}^* (\overline{\alpha_n \cdots \alpha_l c\bar{\gamma} \alpha_k \cdots \alpha_1}) = c \overline{p_i}^* (\overline{\alpha_n \cdots \alpha_1}) \\ &= c \overline{p_i}^* (a \overline{p_i}) = ca \overline{p_i}^* (\overline{p_i}) = ca \end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned} \overline{p_j}^* (\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s u \alpha'_r \cdots \alpha'_1}) &= \overline{p_j}^* (\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s c\bar{\gamma} \alpha'_r \cdots \alpha'_1}) = c \overline{p_j}^* (\overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_1}) \\ &= c \overline{p_j}^* (a' \overline{p_j}) = ca' \overline{p_j}^* (\overline{p_j}) = ca'. \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{a}{a'} \overline{\alpha'_r \cdots \alpha'_1 p_j} \overline{\alpha'_m \cdots \alpha'_s} = \overline{\alpha_k \cdots \alpha_1 p_i} \overline{\alpha_n \cdots \alpha_l},$$

lo que implica $\Phi(q) = \frac{a}{a'} \Phi(q') = b \Phi(q')$, o sea: $q - b q' \in \ker \Phi$.

Veamos ahora que $\ker \Phi \subset I_{T(\Lambda)}$. Sea

$$x = \sum_{i=1}^n k_i q_i \in \ker \Phi,$$

donde $k_i \in k$, $s(q_1) = \cdots = s(q_n)$ y $e(q_1) = \cdots = e(q_n)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada q_i tiene suplemento, en estas condiciones, tenemos que estudiar dos casos:

- (1) Cada q_i admite suplemento γ_i en kQ_Λ . Entonces, dado que Λ es schurian, $\bar{\gamma}_i = c_i \bar{\gamma}_1$, con $0 \neq c_i \in k$ para $i = 2, \dots, n$. Se sigue de la **Observación 1.3.8** que γ_i es suplemento de q_1 para $i = 1, \dots, n$. De aquí, $q_i - b_i q_1 \in I_{T(\Lambda)} \subset \ker \Phi$ y por lo tanto $\Phi(q_i) = b_i \Phi(q_1)$ para $i = 2, \dots, n$. Luego

$$0 = \Phi(x) = k_1 \Phi(q_1) + \sum_{i=2}^n k_i b_i \Phi(q_1) = \left(k_1 + \sum_{i=2}^n k_i b_i \right) \Phi(q_1),$$

y como $\Phi(q_1) \neq 0$, resulta

$$k_1 + \sum_{i=2}^n k_i b_i = 0.$$

Entonces, el elemento x puede escribirse como:

$$x = - \left(k_1 + \sum_{i=2}^n k_i b_i \right) q_1 + \sum_{i=1}^n k_i q_i = \sum_{i=2}^n k_i (q_i - b_i q_1),$$

en consecuencia $x \in I_{T(\Lambda)}$.

- (2) Existe r , $1 \leq r < n$ tal que q_1, \dots, q_r pertenecen a kQ_Λ y q_{r+1}, \dots, q_n no pertenecen a kQ_Λ . Como Λ es schurian, $\bar{q}_i = b_i \bar{q}_1$ con $0 \neq b_i \in k$ para $i = 2, \dots, r$; de donde $q_i - b_i q_1 \in I_{T(\Lambda)}$. Luego:

$$\sum_{i=1}^r k_i q_i = \left(k_1 + \sum_{i=2}^r k_i b_i \right) q_1 + \sum_{i=2}^r k_i (q_i - b_i q_1) = \left(k_1 + \sum_{i=2}^r k_i b_i \right) q_1 + z,$$

con $z = \sum_{i=2}^r k_i (q_i - b_i q_1) \in I_{T(\Lambda)} \subset \ker \Phi$.

Por otra parte, q_1 forma parte de un camino maximal q'_1 de kQ_Λ , cuya imagen en Λ es múltiplo no nulo de uno de los elementos de la base $\mathcal{M} = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_t\}$ de caminos maximales elegida. Digamos $\bar{q}'_1 = h \bar{p}_j$.

Sea μ_1 suplemento de q_1 en el ciclo elemental $\beta_{p_j} q'_1$. Entonces $\Phi(q_1 \mu_1) \neq 0$. Además $\Phi(q_i \mu_1) = 0$ para $i = r+1, \dots, n$ (por la Observación 1.3.5). Como

$$x = z + \left(k_1 + \sum_{i=2}^r k_i b_i \right) q_1 + \sum_{i=r+1}^n k_i q_i,$$

con $z \in I_{T(\Lambda)} \subset \ker \Phi$, resulta

$$0 = \Phi(x \mu_1) = \left(k_1 + \sum_{i=2}^r k_i b_i \right) \Phi(q_1 \mu_1).$$

Luego

$$k_1 + \sum_{i=2}^r k_i b_i = 0 \quad \text{y de aquí:} \quad x = z + \sum_{i=r+1}^n k_i q_i,$$

con $z \in I_{T(\Lambda)} \subset \ker \Phi$. En consecuencia

$$x_1 = \sum_{i=r+1}^n k_i q_i \in \ker \Phi,$$

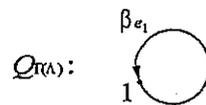
y por el Caso (1) resulta que $x_1 \in I_{T(\Lambda)}$, de donde $x = x_1 + z \in I_{T(\Lambda)}$. Esto completa la demostración. ■

Observación 1.3.9. Si el álgebra Λ es schurian con caminos iguales (esto es, dos caminos no nulos con el mismo origen y el mismo vértice final son iguales en Λ), es fácil ver que la condición (iii) del Teorema 1.3.4 se reemplaza por:

iii') Los elementos $q - q'$, donde q y q' son caminos con el mismo origen y el mismo vértice final y que admiten un mismo suplemento.

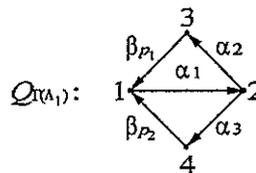
Daremos a continuación la descripción de las relaciones en $Q_{T(\Lambda)}$ para las álgebras estudiadas en los ejemplos vistos en la Sección 1.2.

Ejemplo 1.3.10. Sea Λ tal que $\dim_k \Lambda = 1$. En este caso, $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama:



con la relación: $\beta_{e_1}^2 = 0$.

Ejemplo 1.3.11. Sea Λ_1 el álgebra dada en el ejemplo 1.2.5. Según vimos allí:



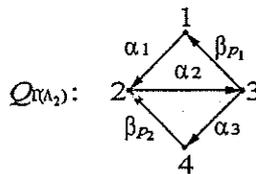
Del Teorema 1.3.4 resulta que $T(\Lambda_1)$ es el álgebra dada por el diagrama $Q_{T(\Lambda_1)}$ con las relaciones:

$$\alpha_1 \beta_{p_1} \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_1 \beta_{p_1} \alpha_2 = \beta_{p_1} \alpha_2 \alpha_1 \beta_{p_1} = 0$$

$$\beta_{p_1} \alpha_2 = \beta_{p_2} \alpha_3$$

$$\alpha_3 \alpha_1 \beta_{p_1} = \alpha_2 \alpha_1 \beta_{p_2} = 0.$$

Ejemplo 1.3.12. Sea Λ_2 el álgebra dada en el ejemplo 1.2.6. Sabemos que



Entonces la extensión trivial $T(\Lambda_2)$ es el álgebra dada por $Q_{T(\Lambda_2)}$ con las relaciones:

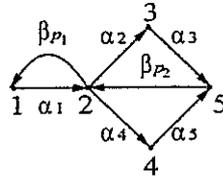
$$\beta_{p_1} \alpha_2 \alpha_1 \beta_{p_1} = \alpha_1 \beta_{p_1} \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_1 \beta_{p_1} \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \beta_{p_1} = \beta_{p_2} \alpha_3$$

$$\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 = \beta_{p_1} \alpha_2 \beta_{p_2} = 0.$$

Notemos que $T(\Lambda_1) \simeq T(\Lambda_2)$ tal como habíamos anticipado.

Ejemplo 1.3.13. Sea Λ_3 el álgebra dada en el ejemplo 1.2.7. En este caso, $T(\Lambda_3)$ es el álgebra dada por el diagrama:



con relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_{p_1} \alpha_1 &= \beta_{p_1} \alpha_1 \beta_{p_1} = 0 \\ \alpha_2 \beta_{p_2} \alpha_3 \alpha_2 &= \alpha_3 \alpha_2 \beta_{p_2} \alpha_3 = \beta_{p_2} \alpha_3 \alpha_2 \beta_{p_2} = 0 \\ \alpha_3 \alpha_2 &= \alpha_5 \alpha_4 \\ \alpha_2 \alpha_1 &= \alpha_4 \alpha_1 = 0 \\ \beta_{p_1} \beta_{p_2} &= 0 \\ \alpha_4 \beta_{p_2} \alpha_3 &= \alpha_2 \beta_{p_2} \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

Sea $\Gamma = T(\Lambda)$ con Λ un álgebra schurian y sean C_1, \dots, C_m los ciclos elementales en Γ . Consideremos el álgebra Λ' que se obtiene eliminando flechas $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ de Q_Γ , exactamente una por cada ciclo elemental C_i ($i = 1, \dots, m$), con las relaciones inducidas. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.3.14. *Sea Λ' como arriba. Si Λ' es schurian, entonces $T(\Lambda') \simeq \Gamma$ como k -álgebras.*

Demostración: Sean $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ las flechas eliminadas, exactamente una por cada ciclo elemental en $T(\Lambda)$. Digamos que ϵ_1 pertenece a C_1, \dots, C_{k_1} , ϵ_2 pertenece a $C_{k_1+1}, \dots, C_{k_2}$ y así sucesivamente, hasta ϵ_s que pertenece a $C_{k_{s-1}+1}, \dots, C_{k_m} = C_m$. Consideremos los caminos $\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m}$ que se obtienen eliminando $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ en C_{k_1}, \dots, C_{k_m} , respectivamente. Veamos que cada γ_{k_i} es un camino maximal en $Q_{\Lambda'}$. Efectivamente, si para algún índice j , $1 \leq j \leq m$, γ_{k_j} no es maximal, entonces existe $\beta \in (Q_{\Lambda'})_1$ tal que $\beta \gamma_{k_j} \neq 0$, o bien $\gamma_{k_j} \beta \neq 0$ en Λ' , luego $\beta \gamma_{k_j} \neq 0$, o bien $\gamma_{k_j} \beta \neq 0$ en Γ . Supongamos $\beta \gamma_{k_j} \neq 0$ en Γ , del Teorema 1.3.4 resulta que el camino $\beta \gamma_{k_j}$ está en algún ciclo elemental, digamos C_i . Sea μ de $s(\epsilon_j)$ en $e(\epsilon_j)$ el suplemento de γ_{k_j} en C_i , entonces β es una flecha de μ . Si $\epsilon_j \in (Q_\Lambda)_1$, entonces μ es un camino en Q_Λ , lo cual es absurdo pues Λ es schurian. Si, en cambio, ϵ_j no es una flecha en Q_Λ , entonces γ_{k_j} es un camino en Q_Λ , luego, por la condición (iii) del Teorema 1.3.4, $\mu = b \epsilon_j$, con $0 \neq b \in k$ y nuevamente se tiene un absurdo, pues las relaciones son admisibles.

Probemos ahora que $\{\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m}\}$ es un conjunto linealmente independiente maximal en Λ' . Verifiquemos en primer lugar la independendencia lineal de $\{\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m}\}$. Supongamos por el absurdo que esto no es así. Entonces, por lo menos dos de estos caminos, digamos γ_{k_i} y

γ_{k_j} tienen el mismo origen y el mismo vértice final. Como Λ' es schurian, $\gamma_{k_i} = c\gamma_{k_j}$ en Λ' , con $0 \neq c \in k$ y por lo tanto las flechas ϵ_i y ϵ_j tienen origen $e(\gamma_{k_i}) = e(\gamma_{k_j})$ y vértice final $s(\gamma_{k_i}) = s(\gamma_{k_j})$. Debemos considerar los siguientes casos:

- i) ϵ_i y ϵ_j son flechas en Q_Λ . Esto es imposible, pues Λ es schurian.
- ii) ϵ_i y ϵ_j no son flechas en Q_Λ . En este caso $\epsilon_i = \beta_{p_i}$ y $\epsilon_j = \beta_{p_j}$, con $\bar{p}_i, \bar{p}_j \in \mathcal{M}$. Entonces p_i y p_j son caminos maximales en Q_Λ con origen $s(\gamma_{k_i})$ y fin $e(\gamma_{k_i})$, y como Λ es schurian, $\bar{p}_i = d\bar{p}_j$, con $0 \neq d \in k$. Esto es una contradicción, porque $\{\bar{p}_i, \bar{p}_j\}$ es linealmente independiente.
- iii) $\epsilon_i = \beta_{p_i}$ y $\epsilon_j \in Q_\Lambda$. Se tiene entonces que $\gamma_{k_i} \in Q_\Lambda$. Luego $\epsilon_j \gamma_{k_i} = 0$, pues Λ es schurian. Como $\gamma_{k_i} = c\gamma_{k_j}$ en Λ' , se deduce que $\epsilon_j \gamma_{k_i} = c\epsilon_j \gamma_{k_j} \neq 0$ en $\Gamma = T(\Lambda)$, nuevamente una contradicción.

Resta probar la maximalidad de $\{\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m}\}$. Sea δ un camino maximal en $Q_{\Lambda'}$, entonces $\delta \neq 0$ en Γ y de aquí, δ está en algún ciclo elemental, digamos $C_{k_{i-1}+l}$, con $1 \leq l \leq k_i - k_{i-1}$. Como δ es maximal en $Q_{\Lambda'}$, se tiene que el suplemento de δ en el ciclo $C_{k_{i-1}+l}$ es ϵ_i . En particular, $s(\delta) = e(\epsilon_i)$ y $e(\delta) = s(\epsilon_i)$. Teniendo en cuenta que γ_{k_i} es un camino en $Q_{\Lambda'}$ con el mismo origen y el mismo fin que δ y que Λ' es schurian, resulta $\delta = c\gamma_{k_i}$, con $0 \neq c \in k$.

Probemos ahora que $T(\Lambda') \simeq \Gamma$. Sea $\Theta : kQ_{T(\Lambda')} \rightarrow \Gamma$ el morfismo de k -álgebras definido sobre los caminos de longitud cero y los de longitud uno como sigue:

$$\begin{aligned} \Theta(e_i) &= e_i, & \text{para } i = 1, \dots, n \\ \Theta(\beta) &= \beta, & \text{si } \beta \text{ es una flecha en } Q_{\Lambda'} \\ \Theta(\beta_{\gamma_{k_i}}) &= \epsilon_i, & \text{para } i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Es fácil ver que Θ es un epimorfismo y que $I_{T(\Lambda')} \subset \ker \Theta$. En consecuencia, Θ induce un isomorfismo de k -álgebras $\bar{\Theta} : T(\Lambda') \rightarrow \Gamma$, lo cual concluye la demostración. \blacksquare

Mostraremos en la siguiente proposición que de esta manera se obtienen todas las álgebras Λ' schurian tales que $T(\Lambda') \simeq \Gamma$.

Proposición 1.3.15. *Sea $\Gamma = T(\Lambda)$, con Λ schurian y supongamos que C_1, \dots, C_m son los ciclos elementales de $Q_{T(\Lambda)}$. Si Λ' es un álgebra schurian y $T(\Lambda') \simeq \Gamma$, entonces Λ' se obtiene de Γ eliminando exactamente una flecha de cada ciclo C_i , para $i = 1, \dots, m$.*

Demostración: Sea $\{q_1, \dots, q_t\}$ el conjunto formado por todos los caminos maximales en $Q_{\Lambda'}$ y ordenado de modo tal que $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r\}$ es linealmente independiente maximal en Λ' . Dado que Λ' es schurian, se tiene que para cada $i = r+1, \dots, t$, existe j_i tal que $\bar{q}_i = a_i \bar{q}_{j_i}$, con $0 \neq a_i \in k$ y $1 \leq j_i \leq r$.

Luego, los ciclos elementales en $Q_{T(\Lambda')}$ son:

$$\beta_{q_1} q_1, \dots, \beta_{q_r} q_r, \beta_{q_{j_{r+1}}} q_{r+1}, \dots, \beta_{q_{j_t}} q_t,$$

donde $\{\beta_{q_{j_{r+1}}}, \dots, \beta_{q_{j_t}}\} \subset \{\beta_{q_1}, \dots, \beta_{q_r}\}$. Como por hipótesis $T(\Lambda') \simeq \Gamma$, resulta $m = t$ y, reordenando los índices si es necesario, se tiene que

$$C_1 = \beta_{q_1} q_1, \dots, C_r = \beta_{q_r} q_r, C_{r+1} = \beta_{q_{j_{r+1}}} q_{r+1}, \dots, C_m = \beta_{q_{j_m}} q_m.$$

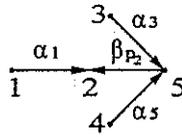
En consecuencia, Λ' se obtiene de Γ eliminando las flechas $\beta_{q_1}, \dots, \beta_{q_r}$. ▮

Ejemplo 1.3.16. Sea $\Gamma = T(\Lambda_3)$ el álgebra dada en el ejemplo 1.3.13. Según vimos, los ciclos elementales son:

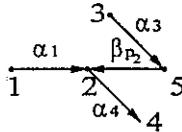
$$C_1 = \beta_{p_1} \alpha_1, \quad C_2 = \beta_{p_2} \alpha_3 \alpha_2, \quad C_3 = \beta_{p_2} \alpha_5 \alpha_4.$$

Mostramos a continuación las álgebras Λ' que se obtienen de acuerdo a las flechas eliminadas:

- i) Eliminando β_{p_1} y β_{p_2} se obtiene el álgebra Λ_3 .
- ii) Eliminando β_{p_1} , α_2 y α_4 se obtiene el álgebra Λ'_2 :

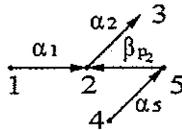


- iii) El álgebra Λ'_3 que se obtiene eliminando β_{p_1} , α_2 y α_5 está dada por el diagrama



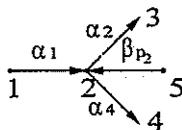
con relaciones: $\alpha_4 \alpha_1 = 0 = \alpha_4 \beta_{p_2} \alpha_3$.

- iv) Si eliminamos las flechas β_{p_1} , α_3 y α_4 , resulta el álgebra Λ'_4 , dada por el diagrama



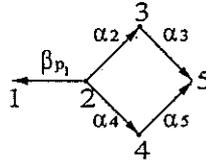
con relaciones: $\alpha_2 \alpha_1 = 0 = \alpha_2 \beta_{p_2} \alpha_5$.

- v) Eliminando β_{p_1} , α_3 y α_5 resulta el álgebra Λ'_5 , dada por el diagrama



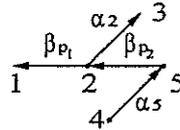
con relaciones: $\alpha_2 \alpha_1 = 0 = \alpha_4 \alpha_1$.

vi) El álgebra Λ'_6 que se obtiene eliminando α_1 y β_{p_2} está dada por el diagrama



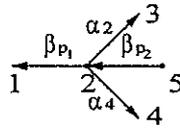
con relaciones: $\alpha_3 \alpha_2 = \alpha_5 \alpha_4$.

vii) Si eliminamos las flechas α_1 , α_3 y α_4 , resulta el álgebra Λ'_7 , dada por el diagrama



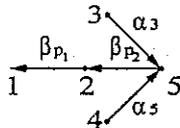
con relaciones: $\beta_{p_1} \beta_{p_2} = 0 = \alpha_2 \beta_{p_2} \alpha_5$.

viii) Eliminando α_1 , α_3 y α_5 resulta el álgebra Λ'_8 , dada por el diagrama



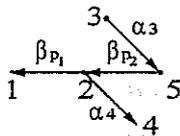
con relaciones: $\beta_{p_1} \beta_{p_2} = 0$.

ix) El álgebra Λ'_9 que se obtiene eliminando α_1 , α_2 y α_4 está dada por el diagrama



con relaciones: $\beta_{p_1} \beta_{p_2} = 0$.

x) Finalmente, si eliminamos α_1 , α_2 y α_5 , resulta el álgebra Λ'_{10} , dada por el diagrama

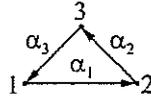


con relaciones: $\beta_{p_1} \beta_{p_2} = 0 = \alpha_4 \beta_{p_2} \alpha_3$.

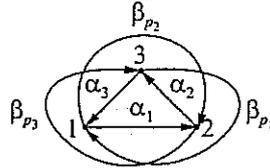
Como se ve fácilmente, todas las álgebras son schurian, y además $\Lambda'_3 \simeq \Lambda'_4$, $\Lambda'_7 \simeq \Lambda'_{10}$. Luego, Λ'_1 , Λ'_2 , Λ'_3 , Λ'_5 , Λ'_6 , Λ'_7 , Λ'_8 y Λ'_9 son todas las álgebras cuyas extensiones triviales son isomorfas a $T(\Lambda_3)$.

En el ejemplo precedente vimos que todas las álgebras Λ' que resultan eliminando exactamente una flecha de cada ciclo elemental de $Q_{T(\Lambda)}$, con las relaciones inducidas, son álgebras schurian. Sin embargo, esto no siempre se verifica, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3.17. Sea Q el diagrama:



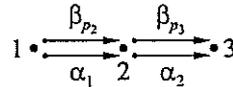
y $\Lambda = kQ/I$, con $I = \text{rad}^3(kQ)$. Si $p_1 = \alpha_2 \alpha_1$, $p_2 = \alpha_3 \alpha_2$ y $p_3 = \alpha_1 \alpha_3$, entonces $\{\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}\}$ es un conjunto formado por caminos maximales, linealmente independiente en Λ . Luego, $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama:



con relaciones:

$$\begin{aligned} \beta_{p_3} \alpha_1 &= \alpha_2 \beta_{p_2} \\ \alpha_1 \beta_{p_1} &= \beta_{p_2} \alpha_3 \\ \beta_{p_1} \alpha_2 &= \alpha_3 \beta_{p_3} \\ \beta_{p_3} \beta_{p_2} &= \beta_{p_2} \beta_{p_1} = \beta_{p_1} \beta_{p_3} = 0 \\ \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Eliminando las flechas α_3 y β_{p_1} se obtiene el álgebra Λ' dada por el diagrama:



con relaciones: $\beta_{p_2} \alpha_2 = \beta_{p_3} \alpha_1$, $\beta_{p_3} \beta_{p_2} = 0$. Por consiguiente, Λ' no es schurian.

Observemos que el diagrama ordinario de Λ tiene un ciclo orientado, es decir Λ no es triangular. Precisamente, un álgebra $\Lambda = kQ/I$ se dice triangular si Q no tiene ciclos orientados.

Del ejemplo 1.3.17 surge la pregunta: dada un álgebra Λ schurian triangular, ¿será cierto que todas las álgebras que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo elemental de $Q_{T(\Lambda)}$, con las relaciones inducidas, son schurian?. La respuesta es afirmativa, como probamos en la siguiente proposición.

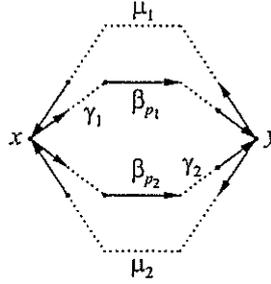
Proposición 1.3.18. *Sea Λ un álgebra schurian triangular y supongamos que C_1, \dots, C_m son los ciclos elementales de $Q_{T(\Lambda)}$. Si Λ' se obtiene de $T(\Lambda)$ eliminando exactamente una flecha de cada ciclo C_i , $i = 1, \dots, m$, entonces Λ' es schurian.*

Demostración: Sean $\gamma_1, \gamma_2 : x \rightarrow y$ caminos no nulos en Λ' . Es claro que γ_1 y γ_2 no son flechas en Λ , pues Λ es schurian. Tenemos los siguientes casos:

- i) γ_1 y γ_2 son caminos de longitud mayor que uno en Λ . En este caso, $\gamma_1 = b\gamma_2$ en Λ , con $0 \neq b \in k$. Lo que prueba que $\gamma_1 = b\gamma_2$ en Λ' .
- ii) γ_1 y γ_2 son caminos en $T(\Lambda)$, pero no en Λ . Se tiene entonces que γ_1, γ_2 contienen flechas de la forma β_{p_1}, β_{p_2} , respectivamente, donde $\overline{p_1}, \overline{p_2} \in \mathcal{M}$.

Sean $\mu_1, \mu_2 : y \rightarrow x$ suplementos de γ_1, γ_2 en los ciclos elementales, digamos C_1, C_2 , que se obtienen reordenando las flechas si es necesario, de $\gamma_1 \mu_1$ y $\gamma_2 \mu_2$, respectivamente. Por construcción, es claro que μ_1 y μ_2 son caminos no nulos en Λ . Además, $\mu_1, \mu_2 \notin (Q_\Lambda)_0$, pues Λ es schurian. Luego, $\mu_1 = c\mu_2$, con $0 \neq c \in k$, de donde $\gamma_2 \mu_1 = c\gamma_2 \mu_2 \neq 0$.

Es sencillo ver que un reordenamiento de las flechas de $\gamma_2 \mu_1$ es un ciclo elemental, digamos C_3 , según sugiere el siguiente diagrama:



Luego, γ_1, γ_2 admiten el mismo suplemento $\mu_1 \in \Lambda$ en los ciclos C_1 y C_3 , respectivamente. Del Teorema 1.3.4 resulta que $\gamma_1 = b\gamma_2$ en $T(\Lambda)$, y de aquí $\gamma_1 = b\gamma_2$ en Λ' .

- iii) γ_1 es un camino en $T(\Lambda)$, pero no en Λ y γ_2 es un camino en Λ . En estas condiciones, γ_1 admite suplemento $\mu_1 : y \rightarrow x$ en un ciclo elemental, digamos C_1 . Además, μ_1 es un camino en Λ . En consecuencia, $\mu_1 \gamma_2$ es un ciclo orientado en Q_Λ , lo cual es una contradicción, pues Λ es triangular.

Se concluye entonces que Λ' es un álgebra schurian. ■

Del análisis precedente, resulta en forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.3.19. *Sea Λ un álgebra schurian triangular. Las álgebras cuyas extensiones triviales son isomorfas a $T(\Lambda)$ son, precisamente, las que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo elemental de $Q_{T(\Lambda)}$, con las relaciones inducidas.*

A continuación, vamos a describir las álgebras Γ que son extensiones triviales de un álgebra schurian con caminos iguales. Comenzamos con la siguiente proposición:

Proposición 1.3.20. *Sea Λ un álgebra schurian y $C = \alpha_n \cdots \alpha_1$ un ciclo orientado de $Q_{T(\Lambda)}$. Sea $C_j = \alpha_{j-1} \cdots \alpha_n \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *Existe j tal que C_j es elemental.*

ii) C_j es no nulo en $T(\Lambda)$, para todo $j = 1, \dots, n$.

iii) C es no nulo en $T(\Lambda)$.

Demostración:

(i) \Rightarrow (ii) Resulta directamente de la **Observación 1.3.6**.

(ii) \Rightarrow (iii) Es obvio, pues $C = C_1$.

(iii) \Rightarrow (i) Por la **Observación 1.3.5** se tiene que C contiene exactamente una flecha de la forma β_{p_i} . Sea Γ el camino formado por todas las flechas de C , excepto β_{p_i} . Dado que Λ es schurian, $\bar{\gamma} = a\bar{p}_i$, con $0 \neq a \in k$, de donde $C = \beta_{p_i} \gamma$ es elemental. ■

De la proposición previa resulta que si Λ es schurian y C es un ciclo orientado no nulo en $T(\Lambda)$, entonces algún reordenamiento de las flechas de C es un ciclo elemental.

Notemos que la extensión trivial de un álgebra schurian tiene la siguiente propiedad:

(A) Todo camino no nulo está en un ciclo orientado no nulo con el mismo origen.

Sea ahora Γ un álgebra que verifica la condición (A). Generalizamos a continuación la definición de suplemento dada anteriormente:

Definición 1.3.21. Sea Γ un álgebra que verifica la condición (A). Diremos que un camino q de Q_Γ admite **suplemento** si está compuesto por flechas de un ciclo orientado no nulo C de longitud mayor o igual que la de q . En tal caso, llamaremos **suplemento de q en C** al camino trivial $e_{s(q)}$ si $s(q) = e(q)$ o, en caso contrario, al camino formado por las restantes flechas de C .

(B) Sea $\Gamma = kQ_\Gamma/I$ un álgebra que verifica la propiedad (A) y tal que son generadores de I los siguientes elementos:

i') Los caminos en Q_Γ formados por $n + 1$ flechas de un ciclo no nulo de longitud n .

ii') Los caminos en Q_Γ cuyas flechas no pertenecen a un mismo ciclo no nulo.

iii') Los elementos $q - q'$, donde q y q' son caminos con el mismo origen, el mismo vértice final y que admiten un mismo suplemento.

Consideremos el álgebra Λ' que se obtiene eliminando flechas $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$ de Q_Γ , exactamente una por cada ciclo no nulo de Γ , con las relaciones inducidas.

Proposición 1.3.22. Sean Γ y Λ' como se indicó arriba. Entonces:

i) Si Λ' es schurian, se tiene que $T(\Lambda') \simeq \Gamma$ como k -álgebras.

ii) Si Λ' no es schurian, el álgebra Γ es de tipo de representación infinito.

Demostración:

- i) Con la notación empleada en la **Proposición 1.3.14**, tenemos que si $\gamma_{k_i} = c\gamma_{k_j}$ en Λ' , con $0 \neq c \in k$, entonces $0 \neq \epsilon_i \gamma_{k_i} = c \epsilon_i \gamma_{k_j}$ en Γ . Esto muestra que $\epsilon_i \gamma_{k_j}$ es un ciclo no nulo con el mismo origen que el ciclo orientado no nulo $\epsilon_j \gamma_{k_j}$. Luego ϵ_i y ϵ_j tienen un mismo suplemento γ_{k_j} y en consecuencia, $\epsilon_i = \epsilon_j$ en Γ , una contradicción, pues las relaciones son admisibles. Por lo tanto, $\{\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m}\}$ es un conjunto linealmente independiente en Λ' formado por caminos maximales. De aquí en más, la demostración se completa como en la **Proposición 1.3.14**.
- ii) Si Λ' no es schurian, entonces es de tipo de representación infinito. Además, Λ' es un cociente de Γ , de donde resulta que Γ es de tipo de representación infinito, porque Λ' es de tipo infinito. ■

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.3.23. Sea $\Gamma = kQ_\Gamma/I$ un álgebra de tipo de representación finito. Γ es la extensión trivial de un álgebra schurian con caminos iguales si, y sólo si, verifica las condiciones dadas en (B).

1.4 Aplicación: Número de sumandos directos indescomponibles de los módulos $rP/\text{soc } P$

Brenner muestra en [Br] cómo determinar el número de sumandos directos indescomponibles del término medio de una sucesión de Auslander – Reiten

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow \text{Tr } D S \rightarrow 0,$$

donde S es simple no inyectivo. Como consecuencia, obtiene para el caso particular de álgebras de artin autoinyectivas el número de sumandos directos indescomponibles del módulo $rP/\text{soc } P$, donde P es proyectivo indescomponible.

El propósito de esta sección es mostrar que en el caso de la extensión trivial de un álgebra schurian Λ , los resultados de Brenner tienen una sencilla interpretación en términos de los ciclos orientados de $Q_{T(\Lambda)}$. Más precisamente, definiremos una relación de equivalencia en el conjunto \mathcal{C}_h de los ciclos orientados no nulos en $T(\Lambda)$ con origen en el vértice h y probaremos que el número de sumandos directos indescomponibles de $rP_h/\text{soc } P_h$ coincide con el número de clases de equivalencia en \mathcal{C}_h .

Vamos a describir a continuación los resultados de S. Brenner.

Sea Λ un álgebra de artin. Llamaremos flecha a un elemento de Λ de la forma: $\alpha = f \alpha g$, donde f y g son idempotentes primitivos de Λ y $\alpha \in \mathfrak{r} - \mathfrak{r}^2$.

Sea e un idempotente primitivo de Λ . Un conjunto A de flechas se dice un conjunto completo de flechas para $\mathfrak{r}e$ si:

- i) Genera $\mathfrak{r}e$ (como Λ -módulo).
- ii) Ningún subconjunto propio de A genera $\mathfrak{r}e$.

Un conjunto completo de flechas para $e\mathfrak{r}$ se define en forma similar.

Sea \mathcal{N} el conjunto de pares (N, n) de enteros tales que existen conjuntos de flechas A_i y B_i , $0 \leq i \leq n$, de los cuales sólo A_0 y B_0 pueden ser vacíos, satisfaciendo las siguientes condiciones:

- i) $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- ii) $\bigcup_{i=0}^n A_i$ es un conjunto completo de flechas para $e\mathfrak{r}$.
- iii) $\bigcup_{i=0}^n B_i$ es un conjunto completo de flechas para $\mathfrak{r}e$.
- iv) Si $i \neq j$, o bien $i = 0$, o bien $j = 0$, entonces $\alpha \in A_i$ y $\beta \in B_j$ implica $\beta \alpha = 0$.
- v) $N = n + \text{card } A_0$.

Sean $N_e = \max \{N : \text{existe } n \text{ con } (N, n) \in \mathcal{N}\}$ y $n_e = \min \{n : \text{existe } n \text{ con } (N_e, n) \in \mathcal{N}\}$.

Teorema 1.4.1 (Brenner). *Sea S un Λ -módulo simple no inyectivo, y e un idempotente primitivo de Λ tal que $S \simeq \Lambda e / \mathfrak{r}e$. El término medio de la sucesión de Auslander - Reiten:*

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow \text{Tr } D S \rightarrow 0$$

tiene exactamente N_e sumandos directos indescomponibles. Además el número de sumandos directos proyectivos indescomponibles de E es igual a $N_e - n_e$.

Corolario 1.4.2 (Brenner). *Sea Λ un álgebra de artin autoinyectiva y e un idempotente primitivo de Λ . El número de sumandos directos indescomponibles del Λ -módulo $\mathfrak{r}P / \text{soc } P$, donde $P = \Lambda e$, es igual a n_e .*

Nos dedicaremos en lo que sigue a interpretar los números N_e y n_e en el caso particular de la extensión trivial $T(\Lambda)$, donde Λ es un álgebra schurian.

Para cada $h \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ sea \mathcal{C}_h el conjunto de todos los ciclos orientados C , no nulos en $T(\Lambda)$, con

$$s(C) = e(C) = h.$$

La descripción del diagrama de $T(\Lambda)$ dada en la Sección 1.2 nos asegura que $\mathcal{C}_h \neq \emptyset$.

Definición 1.4.3. Sean $C, C' \in \mathcal{C}_h$. Diremos que C está en relación con C' y escribiremos: $C \mathfrak{R} C'$ si existe una flecha α , común a los mismos, con $s(\alpha) = h$ o bien: $e(\alpha) = h$.

Por otra parte, definiremos una relación \mathfrak{R}' en el conjunto $A_h = \{\alpha \in (Q_{T(\Lambda)})_1 : e(\alpha) = h\}$ del siguiente modo:

Definición 1.4.4. Sean $\alpha, \alpha' \in A_h$. Diremos que α está en relación con α' y escribiremos: $\alpha \mathfrak{R}' \alpha'$ si existe $\beta \in (Q_{T(\Lambda)})_1$ tal que $\beta\alpha \neq 0$ y $\beta\alpha' \neq 0$ en $T(\Lambda)$.

Notemos que en general, la relación \mathfrak{R} no verifica la propiedad transitiva. Hemos de considerar, entonces, la relación de equivalencia en \mathcal{C}_h generada por \mathfrak{R} , que denotaremos con " \equiv ". Asimismo, denotaremos con " \approx " a la relación de equivalencia en A_h generada por \mathfrak{R}' .

Vamos a estudiar ahora la conexión entre las relaciones de equivalencia definidas. La misma resultará en forma inmediata de los lemas que presentamos a continuación:

Lema 1.4.5. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A_h$ tales que $\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_2 \mathfrak{R}' \dots \mathfrak{R}' \alpha_m$. Entonces existen ciclos:

$$C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}_h \text{ con } \alpha_i \in C_i \text{ para } i = 1, \dots, m$$

y además: $C_1 \equiv C_m$.

Demostración: Por inducción en m . Si $m = 1$, es claro que existe un ciclo C_1 con $\alpha_1 \in C_1$. Supongamos que $\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_2 \mathfrak{R}' \dots \mathfrak{R}' \alpha_m$, donde $m \geq 2$. De $\alpha_{m-1} \mathfrak{R}' \alpha_m$, resulta que existe $\beta \in (Q_{T(\Lambda)})_1$ tal que $\beta\alpha_{m-1} \neq 0$ y $\beta\alpha_m \neq 0$. Entonces hay ciclos C'_{m-1} y C_m que contienen a $\beta\alpha_{m-1}$ y $\beta\alpha_m$, respectivamente. De aquí: $C'_{m-1} \mathfrak{R} C_m$ y además: $\alpha_{m-1} \in C'_{m-1}$, $\alpha_m \in C_m$.

Por la hipótesis de inducción, existen ciclos C_1, \dots, C_{m-1} , con $\alpha_i \in C_i$ para $i = 1, \dots, m-1$ y $C_1 \equiv C_{m-1}$. Ahora bien, como α_{m-1} es una flecha común a C'_{m-1} y a C_{m-1} se tiene: $C_{m-1} \mathfrak{R} C'_{m-1}$, en conclusión: $C_1 \equiv C_m$, lo que termina la demostración. ■

Lema 1.4.6. Sean $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}_h$ tales que $C_1 \mathfrak{R} C_2 \mathfrak{R} \dots \mathfrak{R} C_m$. Entonces existen flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A_h$, con $\alpha_i \in C_i$ para $i = 1, \dots, m$ y además: $\alpha_1 \approx \alpha_m$.

Demostración: Razonamos nuevamente por inducción en m . Si $m = 1$ no hay nada que probar, supongamos pues que $C_1 \mathfrak{R} C_2 \mathfrak{R} \dots \mathfrak{R} C_m$, donde $m \geq 2$. Por hipótesis inductiva, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in A_h$ con $\alpha_i \in C_i$ para $i = 1, \dots, m-1$ y $\alpha_1 \approx \alpha_{m-1}$. De $C_{m-1} \mathfrak{R} C_m$ se sigue que existe una flecha β , común a ambos, con $s(\beta) = h$ o bien $e(\beta) = h$. Si $s(\beta) = h$, sea $\alpha_m \in C_m$ la única flecha que llega al vértice h . Entonces $\beta\alpha_{m-1} \neq 0$ y $\beta\alpha_m \neq 0$ y por lo tanto $\alpha_{m-1} \mathfrak{R}' \alpha_m$, en consecuencia $\alpha_1 \approx \alpha_m$. Si, en cambio, $e(\beta) = h$ entonces $\alpha_{m-1} = \beta$ y tomando $\alpha_m = \beta$ resulta lo que queríamos demostrar. ■

Proposición 1.4.7. Sean $\alpha, \alpha' \in A_h$, $C, C' \in \mathcal{C}_h$ tales que $\alpha \in C$ y $\alpha' \in C'$. Entonces $\alpha \approx \alpha'$ si, y sólo si, $C \equiv C'$.

Demostración: Supongamos que $\alpha \approx \alpha'$. Entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A_h$ tales que

$$\alpha = \alpha_1 \mathcal{R}' \alpha_2 \mathcal{R}' \dots \mathcal{R}' \alpha_m = \alpha'.$$

Sabemos por el Lema 1.4.5 que existen ciclos C_1, \dots, C_m con $\alpha \in C_1, \alpha_2 \in C_2, \dots, \alpha' \in C_m$ y $C_1 \equiv C_m$; de aquí y de las hipótesis se sigue que $C \equiv C_1$ y $C_m \equiv C'$ y entonces por transitividad $C \equiv C'$.

Recíprocamente, si $C \equiv C'$ se sigue inmediatamente del Lema 1.4.6, que $\alpha \approx \alpha'$. ■

La proposición anterior tiene una consecuencia inmediata:

Corolario 1.4.8. $\text{card}(C_h/\equiv) = \text{card}(A_h/\approx)$.

Demostración: Sea $\Psi : C_h \rightarrow A_h$ la aplicación definida por: $\Psi(C) = \alpha_C$, donde α_C es la única flecha de C que termina en h . Es claro que Ψ es sobreyectiva y según la Proposición 1.4.7: $C \equiv C'$ si, y sólo si, $\Psi(C) \approx \Psi(C')$. Tenemos en consecuencia que Ψ induce una aplicación biyectiva $\bar{\Psi} : C_h/\equiv \rightarrow A_h/\approx$. ■

La siguiente proposición muestra que cuando $\dim_k \Lambda > 1$, el número de ciclos no congruentes en el conjunto C_h es precisamente N_{e_h} , el cual en este caso coincide con n_{e_h} .

Proposición 1.4.9. *Sea h un vértice de $Q_{T(\Lambda)}$ y e_h el idempotente primitivo asociado. Si $\dim_k \Lambda > 1$, entonces $N_{e_h} = \text{card}(C_h/\equiv) = n_{e_h}$.*

Demostración: Consideramos la partición A_1, \dots, A_t dada por la relación " \approx " en A_h y definimos:

$$B_i = \{\beta : \text{existe } \alpha \in A_i \text{ con } \beta\alpha \neq 0\} \quad \text{para } i = 1, \dots, t.$$

Notemos que $B_i \neq \emptyset$, pues $\dim_k \Lambda > 1$ implica que todo vértice de $Q_{T(\Lambda)}$ está en un ciclo de longitud mayor o igual que dos. Definimos además: $A_0 = B_0 = \emptyset$. Resulta entonces por construcción que $(t, t) \in \mathcal{N}$.

Probaremos ahora que si $(N, n) \in \mathcal{N}$, entonces $N = n \leq t$. En efecto, sean A'_i, B'_i , para $i = 0, \dots, n$, conjuntos de flechas que satisfacen las condiciones i) – v) dadas por Brenner. Se sigue de iv) y de la hipótesis sobre Λ que:

- (a) $B'_i = \{\beta : \text{existe } \alpha \in A'_i \text{ con } \beta\alpha \neq 0\}$ para $i = 1, \dots, n$.
- (b) $B'_0 = A'_0 = \emptyset$.

De (b) resulta que $N = n$. Por otra parte, es fácil ver que si $\alpha \approx \alpha'$, entonces existe un índice j para el cual α y α' pertenecen a A'_j . O sea: $A_i \subset A'_{j_i}$ para $i = 1, \dots, t$, de modo que $n \leq t$. Hemos visto entonces que:

$$N_{e_h} = n_{e_h} = \text{card}(A_h/\approx),$$

lo cual, por el Corolario 1.4.8 completa la demostración. ■

Observación 1.4.10. Si $\dim_k \Lambda = 1$, entonces $\mathcal{N} = \{(1, 0), (1, 1)\}$, luego $N_{e_1} = 1$ y $n_{e_1} = 0$.

La proposición anterior permite formular el Teorema 1.4.1 y su corolario para el caso particular de extensiones triviales del siguiente modo:

Teorema 1.4.11. *Sea S_h el $T(\Lambda)$ -módulo simple asociado al vértice h . El número de sumandos directos indescomponibles del término medio de la sucesión de Auslander – Reiten:*

$$0 \rightarrow S_h \rightarrow E \rightarrow \text{Tr D } S_h \rightarrow 0$$

es igual al número de ciclos orientados no congruentes en el conjunto C_h . Además, E no tiene sumandos directos proyectivos indescomponibles, excepto que $\dim_k \Lambda = 1$.

Corolario 1.4.12. *Sea P_h el $T(\Lambda)$ -módulo proyectivo indescomponible asociado al vértice h de $Q_{T(\Lambda)}$. Si $\dim_k \Lambda > 1$, entonces el número de sumandos directos indescomponibles de $rP_h/\text{soc } P_h$ es igual al número de ciclos orientados no congruentes en C_h .*

Capítulo 2

Álgebras inclinadas iteradas y extensiones triviales

2.1 El proceso inclinante

En algunas ocasiones, cuando la teoría de representaciones de un álgebra Λ es difícil de estudiar directamente, resulta conveniente reemplazar Λ por otra álgebra más simple Γ y reducir un problema sobre Λ a un problema sobre Γ . La idea principal de la teoría inclinante es, dada un álgebra Λ , construir un módulo ${}_{\Lambda}U$, llamado módulo inclinante, de modo tal que si $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(U)^{\text{op}}$, entonces las categorías $\text{mod}\Lambda$ y $\text{mod}\Gamma$ están estrechamente relacionadas, aunque en general no son equivalentes.

Siguiendo [As], recordamos aquí algunos de los resultados principales de la teoría de módulos inclinantes, sin incluir las demostraciones correspondientes.

Definición 2.1.1. Un módulo ${}_{\Lambda}U$ se llama **módulo inclinante**, si satisface las siguientes condiciones:

$$(U1) \text{ pd}_{\Lambda} U \leq 1.$$

$$(U2) \text{ Ext}_{\Lambda}^1(U, U) = 0.$$

(U3) Existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow U' \rightarrow U'' \rightarrow 0$$

con $U', U'' \in \text{add } U$.

Los llamados APR-módulos inclinantes constituyen un ejemplo importante. Estos módulos, considerados por Auslander, Platzeck y Reiten [AuPR] se aplican, en el trabajo citado, para la generalización de los funtores de reflexión de Bernstein, Gelfand y Ponomarev [BeGP].

Ejemplo 2.1.2. Sea Λ un álgebra y S_1 un Λ -módulo simple proyectivo no inyectivo. Sea

$$\Lambda = S_1 \amalg P_2 \amalg \cdots \amalg P_t$$

la descomposición de Λ en módulos proyectivos indescomponibles. El módulo

$$U^{(1)} = \tau^{-1} S_1 \amalg P_2 \amalg \cdots \amalg P_t$$

verifica las condiciones dadas en la definición precedente y se conoce como APR-módulo inclinante.

Definición 2.1.3. Diremos que ${}_{\Lambda}U$ es un módulo inclinante parcial si satisface las condiciones $U1$ y $U2$ de la Definición 2.1.1.

El siguiente lema, debido a Bongartz [Bo1], justifica el nombre de módulo inclinante parcial.

Lema 2.1.4. *Sea ${}_{\Lambda}U$ un módulo inclinante parcial. Entonces existe un módulo ${}_{\Lambda}X$ tal que $U \amalg X$ es un módulo inclinante.*

En tanto, la siguiente proposición muestra que la condición $U3$ puede ser reemplazada por otra, cuya verificación es más simple.

Proposición 2.1.5. *Sea ${}_{\Lambda}U = U_1^{m_1} \amalg \cdots \amalg U_r^{m_r}$, donde cada U_i es un módulo indescomponible tal que U_i no es isomorfo a U_j si $i \neq j$. Entonces ${}_{\Lambda}U$ es un módulo inclinante si, y sólo si, ${}_{\Lambda}U$ es un módulo inclinante parcial y satisface la condición:*

$(U3')$ r es igual al número de Λ -módulos simples no isomorfos.

Definiremos a continuación el concepto dual de módulo inclinante.

Definición 2.1.6. Un módulo ${}_{\Lambda}U$ se dice coinclinante si satisface las siguientes condiciones:

$(U1^*)$ $\text{id}_{\Lambda} U \leq 1$.

$(U2)$ $\text{Ext}_{\Lambda}^1(U, U) = 0$.

$(U3')$ El número de sumandos directos indescomponibles no isomorfos de ${}_{\Lambda}U$ es igual al número de Λ -módulos simples no isomorfos.

Definimos ahora el concepto de teoría de torsión en una categoría de módulos.

Definición 2.1.7. Una teoría de torsión en $\text{mod } \Lambda$ es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de modo que:

i) $\text{Hom}_{\Lambda}(M, N) = 0$ cualesquiera sean $M \in \mathcal{T}$, $N \in \mathcal{F}$.

ii) Si $\text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{F}$, entonces $M \in \mathcal{T}$.

iii) Si $\text{Hom}_\Lambda(X, N) = 0$ para todo $X \in \mathcal{T}$, entonces $M \in \mathcal{F}$.

La clase \mathcal{T} se llama **clase de torsión**, los módulos de \mathcal{T} se llaman **módulos de torsión**, mientras que a \mathcal{F} se le llama **clase libre de torsión** y a sus elementos, **módulos libres de torsión**.

Todo módulo inclinante ${}_\Lambda U$ induce una teoría de torsión en $\text{mod } \Lambda$. En efecto, basta definir:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}({}_\Lambda U) = \text{Gen}({}_\Lambda U) = \{X \in \text{mod } \Lambda : \text{existe un epimorfismo } U^d \rightarrow X \text{ para algún } d\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}({}_\Lambda U) = \{N : \text{Hom}_\Lambda(U, N) = 0\}.$$

Del próximo lema resulta otra descripción de $\mathcal{T}({}_\Lambda U)$.

Lema 2.1.8. *Sea ${}_\Lambda U$ un módulo inclinante, entonces:*

$$\mathcal{T}({}_\Lambda U) = \text{Gen}({}_\Lambda U) = \{M : \text{Ext}_\Lambda^1(U, M) = 0\}.$$

Se dice que una teoría de torsión se **parte** cuando todo módulo indescomponible es de torsión o libre de torsión.

Enunciamos ahora un teorema, debido a Brenner y Butler [BrB], que establece la equivalencia entre las subcategorías $\mathcal{T}({}_\Lambda U)$ y $\mathcal{F}({}_\Lambda U)$ de $\text{mod } \Lambda$ y ciertas subcategorías de $\text{mod } \Gamma$, donde $\Gamma = \text{End}_\Lambda(U)^{\text{op}}$.

Teorema 2.1.9 (Brenner – Butler). *Sea Λ un álgebra, ${}_\Lambda U$ un módulo inclinante y $\Gamma = \text{End}_\Lambda(U)^{\text{op}}$. Entonces:*

i) U_Γ es un módulo inclinante y $\Lambda \simeq \text{End}(U_\Gamma)$.

ii) Los funtores $\text{Hom}_\Lambda(U, \cdot)$ y $\cdot \otimes_\Gamma U$ inducen equivalencias mutuamente inversas entre las subcategorías llenas $\mathcal{T}({}_\Lambda U)$ e $\mathcal{Y}({}_\Lambda U) = \{{}_\Gamma N : \text{Tor}_1^\Gamma(N, U) = 0\}$, mientras que los funtores $\text{Ext}_\Lambda^1(U, \cdot)$ y $\text{Tor}_1^\Gamma(\cdot, U)$ inducen equivalencias mutuamente inversas entre las subcategorías llenas $\mathcal{F}({}_\Lambda U)$ y $\mathcal{X}({}_\Lambda U) = \{{}_\Gamma N : N \otimes U = 0\}$.

Corolario 2.1.10. $D \mathcal{X}({}_\Lambda U) = \mathcal{F}(U_\Gamma)$ y $D \mathcal{Y}({}_\Lambda U) = \mathcal{T}(U_\Gamma)$. En particular, $(\mathcal{X}({}_\Lambda U), \mathcal{Y}({}_\Lambda U))$ es una teoría de torsión en $\text{mod } \Gamma$.

Definición 2.1.11. Una terna (Γ, U, Λ) se dice **terna inclinante** si U es un Λ -módulo inclinante y $\Gamma = \text{End}_\Lambda(U)^{\text{op}}$.

El siguiente resultado muestra que la propiedad de un álgebra de ser de dimensión global finita se mantiene por el proceso inclinante.

Teorema 2.1.12. *Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante. Entonces*

$$|\text{gl dim } B - \text{gl dim } A| \leq 1$$

Podemos considerar asociada al álgebra Λ su grupo de Grothendieck $\text{Gr } \Lambda$, cuya definición recordamos ahora. Para M en $\text{mod } \Lambda$, designamos con (M) la clase de isomorfismo de M . Sea F el grupo abeliano libre generado por las (M) , M en $\text{mod } \Lambda$, y sea H el subgrupo generado por los elementos de la forma $(M) - (M') - (M'')$ tales que hay alguna sucesión exacta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

Entonces $\text{Gr } \Lambda = F/H$. Designamos con $[M]$ a la clase de (M) en $\text{mod } \Lambda$.

Si S_1, \dots, S_n es un conjunto completo de Λ -módulos simples no isomorfos, entonces

$$[S_1], \dots, [S_n]$$

es una base de $\text{Gr } \Lambda$, y si M en $\text{mod } \Lambda$ tiene factores de composición S_i con multiplicidad

$$n_i = \dim_k \text{Hom}(P(i), M),$$

entonces $[M] = \sum n_i [S_i]$ en $\text{Gr } \Lambda$.

El vector dimensión de M , $\underline{\dim} M$ es el vector (n_1, \dots, n_n) .

Teorema 2.1.13. *Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante. Entonces la aplicación $f : K_0(\Lambda) \rightarrow K_0(\Gamma)$ definida por*

$$f(\underline{\dim} M) = \underline{\dim} \text{Hom}_\Lambda(U, M) - \underline{\dim} \text{Ext}_\Lambda^1(U, M)$$

es un isomorfismo de grupos de Grothendieck.

Como consecuencia de este teorema se tiene la invariancia de la forma cuadrática homológica de un álgebra de dimensión global finita por el proceso inclinante.

Recordemos que la característica de Euler de un álgebra Λ de dimensión global finita se define como la forma bilineal \langle, \rangle_Λ sobre $K_0(\Lambda)$ dada por:

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle_\Lambda = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \dim_k \text{Ext}_\Lambda^s(M, N)$$

cualesquiera sean M, N Λ -módulos. (La suma anterior es finita debido a las hipótesis sobre Λ).

La forma cuadrática homológica de Λ es la forma q_Λ sobre $K_0(\Lambda)$ definida por:

$$q_\Lambda = \langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} M \rangle_\Lambda.$$

Proposición 2.1.14. Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante con Λ de dimensión global finita y sea $f : K_0(\Lambda) \rightarrow K_0(\Gamma)$ el homomorfismo del Teorema 2.1.13. Entonces

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle_\Lambda = \langle f(\underline{\dim} M), f(\underline{\dim} N) \rangle_\Gamma$$

Corolario 2.1.15. Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante con Λ de dimensión global finita. Entonces las formas cuadráticas q_Γ y q_Λ son \mathbb{Z} -congruentes, es decir, si una de ellas se obtiene de la otra por un cambio de base en \mathbb{Z}^n .

Definición 2.1.16. Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante. El módulo ${}_\Lambda U$ se dice separante (separador) si la teoría de torsión $(\mathcal{T}({}_\Lambda U), \mathcal{F}({}_\Lambda U))$ se parte en $\text{mod } \Lambda$ (corresp.: la teoría de torsión $(\mathcal{X}({}_\Lambda U), \mathcal{Y}({}_\Lambda U))$ se parte en $\text{mod } \Gamma$).

Un módulo inclinante ${}_\Lambda U$ es separante (separador) si, y sólo si, el módulo inclinate U_Γ es separador (separante). Si ${}_\Lambda U$ es separante, entonces todo Λ -módulo indescomponible se aplica en un Γ -módulo indescomponible por los funtores $\text{Hom}_\Lambda(U, \cdot)$ y $\text{Ext}_\Lambda^1(U, \cdot)$ y en consecuencia, Γ tiene al menos tantos módulos indescomponibles no isomorfos como Λ . Por otro lado, si ${}_\Lambda U$ es separador, entonces todos los Γ -módulos indescomponibles, son imagen por los mismos funtores de Λ -módulos indescomponibles y por lo tanto Γ tiene, a lo sumo, tantos módulos indescomponibles no isomorfos como Λ .

El siguiente teorema nos da una descripción completa de las sucesiones de Auslander - Reiten en $\text{mod } \Gamma$, cuando $\Gamma = \text{End}_\Lambda(U)^{\text{op}}$ y ${}_\Lambda U$ es un módulo inclinante separador.

Teorema 2.1.17. Sea ${}_\Lambda U$ un módulo inclinante separador y $\Gamma = \text{End}_\Lambda(U)^{\text{op}}$. Una sucesión de Auslander - Reiten en $\text{mod } \Gamma$ está completamente en $\mathcal{X}({}_\Lambda U)$, o en $\mathcal{Y}({}_\Lambda U)$, o bien es de la forma:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(U, I) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(U, I/S) \amalg \text{Ext}_\Lambda^1(U, \text{rad } P) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(U, P) \rightarrow 0,$$

donde ${}_\Lambda P$ es un proyectivo indescomponible que no pertenece a $\text{add}_\Lambda U$, ${}_\Lambda P$ es la cápsula proyectiva del simple ${}_\Lambda S$ y ${}_\Lambda I$ es la cápsula inyectiva de ${}_\Lambda S$. Tal sucesión se llama sucesión de conexión.

A continuación, damos un criterio debido a Hoshino [Ho1] que es de utilidad para decidir si un módulo inclinante es separante, separador o si no lo es.

Teorema 2.1.18. Sea (Γ, U, Λ) una terna inclinante. Entonces:

- i) ${}_\Lambda U$ es separante si, y sólo si, para cada ${}_\Gamma X \in \mathcal{X}(U)$, $\text{pd } X = 1$.
- ii) ${}_\Lambda U$ es separador si, y sólo si, para cada ${}_\Lambda M \in \mathcal{F}(U)$, $\text{id } M = 1$.

Corolario 2.1.19. Sea Λ un álgebra hereditaria, entonces todo Λ -módulo inclinante es separador.

2.2 Álgebras inclinadas

Definición 2.2.1. Sea Q un diagrama finito, conexo, sin ciclos orientados. Un álgebra Λ se dice un **álgebra inclinada** de tipo $|Q|$ si existe un módulo inclinante ${}_{\Gamma}U$ sobre el álgebra hereditaria $\Gamma = kQ$ tal que $\Lambda = \text{End}_{\Gamma}(U)^{op}$.

Notemos que por el **Corolario 2.1.19** el módulo inclinante U es separador. Por otra parte, resulta del **Teorema 2.1.12** que la dimensión global de un álgebra inclinada es a lo sumo dos.

D. Happel probó que un álgebra inclinada puede ser obtenida utilizando módulos inclinantes parciales:

Teorema 2.2.2. *Sea H un álgebra hereditaria y ${}_{H}U$ un módulo inclinante parcial. Entonces $\Lambda = \text{End}({}_{H}U)^{op}$ es un álgebra inclinada.*

Daremos ahora algunos resultados sobre el gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra inclinada. Más precisamente, veremos que si un álgebra Λ es inclinada, entonces el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene un subdiagrama conexo lleno que es seccional (esto es, que no se factoriza a través de una sucesión de Auslander – Reiten) y además es isomorfo al diagrama del álgebra hereditaria original. Un tal subdiagrama se dice una sección completa, y su existencia caracteriza a las álgebras inclinadas.

Comenzamos con la definición de sección completa dada por C. M. Ringel en [Rin]:

Definición 2.2.3. Una clase \mathcal{S} de Λ -módulos indescomponibles no isomorfos se dice una **sección completa** si satisface las siguientes condiciones:

- i) $U = \coprod_{M \in \mathcal{S}} M$ es un módulo sincero (es decir, $\text{Hom}_{\Lambda}(P, U) \neq 0$ para todo Λ -módulo proyectivo P).
- ii) Si $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_m$ es una sucesión de no isomorfismos, no nulos en $\text{mod } \Lambda$, con $M_0, M_m \in \mathcal{S}$, entonces $M_i \in \mathcal{S}$ para todo $0 < i < m$.
- iii) Si $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ es una sucesión de Auslander – Reiten, entonces a lo sumo L , o bien N , pertenece a \mathcal{S} . Además, si un sumando indescomponible de M está en \mathcal{S} , entonces L , o bien N , está en \mathcal{S} .

El siguiente resultado, debido a C. M. Ringel [Rin], muestra la relación entre secciones completas y álgebras inclinadas.

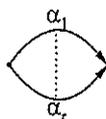
Teorema 2.2.4 (Ringel). *Sea H un álgebra hereditaria, ${}_{H}U$ un módulo inclinante y sea $\Lambda = \text{End}({}_{H}U)^{op}$. Entonces la clase de todos los Λ -módulos indescomponibles de la forma $\text{Hom}_H(U, I)$, donde I es H -módulo inyectivo indescomponible, es una sección completa en $\text{mod } \Lambda$.*

Recíprocamente, si S es una sección completa en $\text{mod } \Lambda$, entonces $U = \coprod_{M \in S} M$ es un módulo inclinante con $H = \text{End}_\Lambda(U)^{op}$ hereditaria. Además S es isomorfa a una sección completa de la forma anterior.

Varios tipos de álgebras inclinadas han sido objeto de estudio en teoría de representaciones. A lo largo de este trabajo serán de interés las álgebras inclinadas de tipo Dynkin. Hemos de utilizar también álgebras de la forma $\Lambda = \text{End}({}_H U)^{op}$, donde $H = kQ$, Q es un diagrama de tipo euclideo y ${}_H U$ es un H -módulo inclinante preproyectivo (o preinyectivo). Se llaman **álgebras mansas ocultas** las álgebras pertenecientes a esta clase.

En el siguiente teorema, debido a D. Happel y D. Vossieck [HaV], se caracteriza a las álgebras mansas ocultas. Antes de enunciarlo es necesario recordar que un álgebra Λ se dice **minimal de tipo de representación infinito** si Λ es de tipo de representación infinito y $\Lambda/\Lambda e_i \Lambda$ es de tipo de representación finito, para todo idempotente e_i de un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ .

Teorema 2.2.5 (Happel – Vossieck). *Un álgebra Λ es minimal de tipo de representación infinito con una componente preproyectiva si, y sólo si, Λ es un álgebra mansa oculta o bien Λ es el álgebra de caminos del diagrama*



para algún $r \geq 2$.

Las álgebras mansas ocultas fueron clasificadas por D. Happel – D. Vossieck en [HaV] y también, independientemente, por K. Bongartz en [Bo2]. Esta clase de álgebras puede ser usada como un criterio efectivo para decidir si un álgebra dada es de tipo de representación finito o si es de tipo de representación infinito.

En adelante, llamaremos lista [HV] a la lista de diagramas con relaciones dada en [HaV]. La misma es de gran utilidad en la resolución de nuestro problema de clasificación. A veces la usaremos para mostrar que un álgebra es de tipo de representación infinito y en otros casos, en el sentido que precisamos a continuación: En varias oportunidades, nos encontraremos con la cuestión de decidir si un álgebra $\Lambda = kQ/I$ es inclinada de tipo Dynkin. Si bien en principio, de acuerdo al Teorema 2.2.4, este problema se puede resolver construyendo el gráfico de Auslander – Reiten de Λ , es de interés contar con algún criterio alternativo que permita abreviar los cálculos. En general, esto puede no ser sencillo. En nuestro caso esta tarea se facilita, pues en muchas ocasiones $\Lambda \simeq \Sigma/\Sigma e \Sigma$, donde Σ es un álgebra de la lista [HV] y e es un idempotente asociado a una fuente i en el diagrama ordinario Q de Λ , es decir, ninguna flecha de Q termina en i .

El siguiente resultado asegura que en estas condiciones, Λ es inclinada de tipo Dynkin.

Teorema 2.2.6. *Sea Σ un álgebra de la lista [HV] de tipo euclideo Δ , i una fuente en el diagrama ordinario de Σ y e_i en Σ el idempotente correspondiente. Supongamos que el álgebra cociente $\Sigma/\Sigma e_i \Sigma$ es indescomponible. Entonces $\Sigma/\Sigma e_i \Sigma$ es inclinada de tipo Dynkin.*

Observación 2.2.7. Daremos solamente la idea de la demostración, que nos fue sugerida por D. Happel. Se utiliza en la misma la noción de categoría perpendicular introducida por W. Geigle y H. Lenzing [GL] y A. Schofield [S] y también algunos resultados que se pueden ver en [GL]. Vale la pena mencionar que en el caso particular en que i es una fuente fuerte (esto es, si no existe ningún camino en $\text{mod } \Lambda$ de P_i en algún proyectivo P_j para $i \neq j$), es posible dar una demostración del Teorema 2.2.6 sin hacer uso de las nociones indicadas previamente.

Demostración: (del teorema 2.2.6) Sea Σ un álgebra de la lista [HV] de tipo euclideo Δ . Entonces $\Sigma = \text{End}({}_H U)^{\text{op}}$, donde H es el álgebra de caminos del diagrama Δ y ${}_H U$ es un módulo inclinante preproyectivo. Sea U_i el sumando directo indescomponible de U tal que $\text{Hom}_H(U, U_i) = \Sigma e_i$. Luego, $U = U_i^{n_i} \amalg U'$, donde ningún sumando directo indescomponible de U' es isomorfo a U_i .

Como i es una fuente, se verifica que

$$\text{Hom}_{\Sigma}(\text{Hom}_H(U, U_i), \text{Hom}_H(U, U'')) = 0,$$

para todo U'' , sumando directo indescomponible de U' . Dado que

$$\text{Hom}_{\Sigma}(\text{Hom}_H(U, U_i), \text{Hom}_H(U, U'')) \simeq \text{Hom}_H(U_i, U''),$$

se tiene que $\text{Hom}_H(U_i, U'') = 0$, de donde $\text{Hom}_H(U_i, U') = 0$.

Consideremos la subcategoría llena U_i^{\perp} de $\text{mod } H$, formada por los módulos Y tales que

$$\text{Hom}_H(U_i, Y) = 0 = \text{Ext}_H^1(U_i, Y).$$

Recordemos que U_i^{\perp} se llama la **categoría perpendicular a derecha** de U_i . Sabemos por [GL] que $U_i^{\perp} \simeq \text{mod } H'$, donde H' es una k -álgebra de dimensión finita, hereditaria y cuyo diagrama Δ' tiene un vértice menos que Δ . Más aún, Δ' coincide a menos de orientación, con un subdiagrama lleno de Δ [HaHKU], lo que implica que Δ' es un diagrama de tipo Dynkin.

Además U' es un $H' = k\Delta'$ -módulo inclinante y $\text{End}({}_{H'} U')^{\text{op}} \simeq \Sigma/\Sigma e_i \Sigma$. ■

2.3 Álgebras inclinadas iteradas

La noción de álgebra inclinada iterada fue introducida por I. Assem y D. Happel en [AsH]. Nos dedicaremos en esta sección a recordar dicho concepto y algunas propiedades de esta clase de álgebras.

Definición 2.3.1. Sea Q un diagrama finito, conexo y sin ciclos orientados. Un álgebra Λ se dice **inclinada iterada de tipo $|Q|$** si existe una sucesión de álgebras $\Lambda_0 = \Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m = kQ$ y una sucesión de módulos inclinantes separantes T^i , tal que $\Lambda_{i+1} = \text{End}_{\Lambda_i}(T^i)^{op}$ para cada $i = 0, \dots, m-1$.

Se sigue inmediatamente de la definición que si Q es un diagrama de Dynkin, entonces un álgebra inclinada iterada de tipo Q es de tipo de representación finito. Análogamente, si Q es un diagrama de tipo euclideo, entonces un álgebra inclinada iterada de tipo euclideo es de tipo de representación finito o bien, de tipo de representación infinito mansa.

Del Teorema 2.1.12 resulta que toda álgebra inclinada iterada tiene dimensión global finita.

En este trabajo nos interesan, en particular, las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin. Por esta razón, centraremos nuestra atención en algunos resultados relativos a esta clase de álgebras, básicamente aquéllos necesarios para el Capítulo 3.

En primer lugar, del Corolario 2.1.15 resulta que la forma cuadrática q_Λ de un álgebra Λ inclinada iterada de tipo Q es congruente a la de kQ . En consecuencia, q_Λ es definida positiva si Q es un diagrama de Dynkin.

El siguiente resultado [AsS4] permite decidir si un álgebra de tipo de representación finito es inclinada iterada de tipo Dynkin. Recordemos que si Λ es triangular y para cualquier presentación (Q, I) de Λ , el grupo fundamental de (Q, I) es el trivial, se dice que Λ es simplemente conexa [AsS1].

Teorema 2.3.2 (Assem – Skowroński). *Sea Λ un álgebra de tipo de representación finito. Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin si, y sólo si, Λ es simplemente conexa y q_Λ es definida positiva.*

Sea $\Lambda = kQ/I$. Recordemos que un álgebra cociente Λ' de Λ se dice una subcategoría convexa de Λ si existe un subdiagrama Q' de Q , lleno y cerrado por caminos tal que $\Lambda' = kQ'/I \cap kQ'$. El siguiente es un hecho bien conocido:

Lema 2.3.3. *Sea Λ' una subcategoría convexa de $\Lambda = kQ/I$. Entonces*

$$\text{Ext}_\Lambda^i(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\Lambda'}^i(X, Y)$$

cualesquiera sean $i \geq 1$ y $X, Y \in \text{mod } \Lambda'$.

Este lema puede demostrarse, por ejemplo, usando los resultados sobre ideales idempotentes fuertes dados en [AuPT].

Se deduce del Teorema 2.3.2 y del Lema 2.3.3 que si Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin, entonces toda subcategoría convexa Λ' , también lo es; aunque en general no son del mismo tipo.

Como consecuencia del Teorema 2.3.2 y del Lema 2.3.3 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.4. *Sea Λ un álgebra inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n y Λ' una subcategoría convexa de Λ . Entonces Λ' es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{A}_m ó \mathbb{D}_m , con $m \leq n$.*

Demostración: La demostración que damos aquí utiliza las nociones de forma cuadrática asociada a un grafo, raíces de una forma cuadrática, sistema reducido de raíces y bases. No introduciremos aquí estos conceptos, pues sólo han de utilizarse en esta parte del trabajo. Los mismos están definidos en [Bou].

Sean q_Λ y $q_{\Lambda'}$ las formas cuadráticas asociadas a Λ y Λ' , respectivamente, sabemos que ambas son definidas positivas. Consideremos el conjunto R de todas las raíces de q_Λ en \mathbb{Z}^n , esto es, el conjunto de todos los $z \in \mathbb{Z}^n$ tales que $q_\Lambda(z) = 1$. Análogamente, sea R' el conjunto de todas las raíces de $q_{\Lambda'}$ en \mathbb{Z}^m , con $m \leq n$, donde m es el número de vértices de $q_{\Lambda'}$. Como Λ' es una subcategoría convexa de Λ , se tiene que si $z = (z_1, \dots, z_m)$ es raíz de $q_{\Lambda'}$, entonces $z = (z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ es raíz de q_Λ , reordenando los vértices si es necesario.

Resulta de [Rin, §1.2, p. 10] que R , considerado como subconjunto de \mathbb{R}^n , es un sistema reducido de raíces de \mathbb{R}^n (en el sentido de Bourbaki [Bou]). De modo análogo R' , considerado como subconjunto de \mathbb{R}^m , es un sistema reducido de raíces de \mathbb{R}^m .

Es claro que $R' = R \cap V'$, donde

$$V' = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Sea \mathcal{B}' una base del sistema de raíces R' , aplicando [Bou, prop. 24, p. 165] se tiene que existe una base \mathcal{B} de R que contiene a \mathcal{B}' .

Como en [Rin, §1.2, p. 10], usando la expresión de q_Λ en términos de la base \mathcal{B} , se deduce que q_Λ es la forma cuadrática de un grafo. El mismo es, por hipótesis, de tipo Dynkin \mathbb{D}_n . De manera similar, la forma cuadrática $q_{\Lambda'}$ expresada en la base \mathcal{B}' , es la forma cuadrática de un grafo Δ' , con Δ' de tipo Dynkin. La base \mathcal{B}' está contenida en \mathcal{B} , luego la matriz de $q_{\Lambda'}$ en \mathcal{B}' es submatriz de q_Λ en \mathcal{B} y corresponde a un subgrafo Δ_1 de Δ . Es claro que Δ' es de tipo \mathbb{A}_m ó \mathbb{D}_m , con $m \leq n$, por ser Δ de tipo \mathbb{D}_n . Como el grafo que define a una forma cuadrática definida positiva es único [Rin, §1.2, p. 9], resulta $\Delta_1 = \Delta'$. ■

2.4 Extensiones triviales

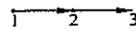
En esta sección recordaremos algunos resultados sobre extensiones triviales. Incluimos, básicamente aquéllos que juegan un papel fundamental en la resolución de nuestro problema de clasificación. Omitiremos las demostraciones correspondientes, que pueden verse en los trabajos a los que hacemos referencia en cada caso.

La relación entre el tipo de representación de un álgebra Λ dada y el de la extensión trivial $T(\Lambda)$ ha sido objeto de estudio de varios matemáticos. Este problema fue considerado por W. Müller [M], E. Green e I. Reiten [GrR] e Y. Iwanaga y T. Wakamatsu [IW], en el caso de álgebras Λ de radical cuadrado cero.

El siguiente resultado fue probado por H. Tachikawa en [T] (ver también [Y1]).

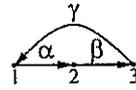
Teorema 2.4.1 (Tachikawa). *Sea Λ un álgebra hereditaria y $T(\Lambda)$ su extensión trivial. Entonces el cardinal de $\text{ind } T(\Lambda)$ es el doble del cardinal de $\text{ind } \Lambda$. En particular, $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito si, y sólo si, $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito.*

Ejemplo 2.4.2. Sea Q el diagrama



y $\Lambda = kQ$. En este caso hay seis Λ -módulos indescomponibles no isomorfos, a saber: los proyectivos P_1, P_2 y P_3 , los simples no proyectivos S_1 y S_2 y el módulo inyectivo no proyectivo I_2 .

De acuerdo a la descripción dada en el **Capítulo 1**, la extensión trivial $T(\Lambda)$ está definida por el diagrama:



con relaciones $\alpha\gamma\beta\alpha = \beta\alpha\gamma\beta = \gamma\beta\alpha\gamma = 0$.

Es fácil ver que los $T(\Lambda)$ -módulos indescomponibles no isomorfos son: los proyectivos - inyectivos P'_1, P'_2 y P'_3 , los simples S'_1, S'_2 y S'_3 y los módulos $rP'_1, rP'_2, rP'_3, rP'_1/\text{soc } P'_1, rP'_2/\text{soc } P'_2$ y $rP'_3/\text{soc } P'_3$. Además, vía la inclusión canónica de $\text{mod } \Lambda$ en $\text{mod } T(\Lambda)$, podemos identificar P_1 con rP'_3, P_2 con $rP'_1/\text{soc } P'_1, P_3$ con S'_3, S_1 con S'_1, S_2 con S'_2 e I_2 con $rP'_3/\text{soc } P'_3$.

El siguiente teorema, debido a K. Yamagata [Y2] nos será de utilidad en el estudio de las extensiones triviales de tipo de representación finito.

Teorema 2.4.3 (Yamagata). *Sea $T(\Lambda)$ la extensión trivial de un álgebra Λ . Si $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, entonces Λ es triangular.*

Como nuestro objetivo es clasificar las álgebras $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito, en el siguiente capítulo nos limitaremos a considerar extensiones triviales de álgebras triangulares.

Presentaremos ahora algunas nociones necesarias para enunciar los resultados dados por diferentes matemáticos, en los cuales se muestra la estrecha conexión entre las extensiones triviales de tipo de representación finito, las álgebras inclinadas de tipo Dynkin y las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin.

Comenzaremos con el concepto de gráfico de traslación, que es una generalización de la noción de gráfico de Auslander – Reiten. El concepto mencionado, fue introducido por C. Riedtmann [Rie] y es de suma importancia en la clasificación de álgebras autoinyectivas de tipo de representación finito. Enunciaremos después el resultado de C. Riedtmann [Rie], según el cual las álgebras autoinyectivas de tipo de representación finito pueden ser distribuidas en clases. Esta distribución se hace de acuerdo a que el subgráfico estable del gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra autoinyectiva de tipo de representación finito dada, sea de tipo Dynkin A_n , D_n ó E_p , con $p = 6, 7, 8$. Como la clase de álgebras autoinyectivas de tipo de representación finito contiene a la de las extensiones triviales de tipo de representación finito, estas últimas también pueden ser distribuidas en clases. Más precisamente, las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan A_n , D_n ó E_p , con $p = 6, 7, 8$.

En esta presentación, seguimos a [AuRS].

Definición 2.4.4. Sea Σ un grafo valuado, Σ_0 el conjunto de vértices y Σ_1 el conjunto de flechas, de modo que Σ es localmente finito (esto es, para cada vértice i el número de flechas que salen y llegan a i es finito). Sea τ una aplicación inyectiva de un subconjunto de Σ_0 en Σ_0 . Si $x \in \Sigma_0$, sea $x^- = \{y \in \Sigma_0 : \text{hay una flecha } y \rightarrow x\}$, es decir, el conjunto de los predecesores inmediatos de x . El conjunto de los sucesores inmediatos de x se define de modo análogo: $x^+ = \{y \in \Sigma_0 : \text{hay una flecha } x \rightarrow y\}$.

El par (Σ, τ) se dice un **gráfico de traslación** si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Σ no tiene lazos ni flechas múltiples.
- ii) Para cada $x \in \Sigma_0$, tal que $\tau(x)$ está definida, se verifica que $x^- = \tau(x)^+$
- iii) Si $\alpha : x \rightarrow y$ es una flecha con valuación (a, b) y $\tau(y)$ está definida, entonces la flecha de $\tau(y)$ en x tiene valuación (b, a) .

Diremos que el gráfico de traslación (Σ, τ) es un **gráfico de traslación propio** si se verifica además:

- iv) Para cada $x \in \Sigma_0$, tal que $\tau(x)$ está definida, el conjunto x^- es no vacío.

Asociado a un gráfico de traslación (Σ, τ) hay un gráfico de traslación propio $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\tau})$ que se obtiene restringiendo τ al conjunto de vértices x tales que x^- es no vacío.

La aplicación τ se llama **traslación**. Es claro que el gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra Λ es un gráfico de traslación, donde τ es la aplicación $D \text{ Tr}$.

Sea (Σ, τ) un gráfico de traslación. De manera totalmente análoga a las definiciones dadas en el caso del gráfico de Auslander – Reiten de un álgebra Λ , diremos que un vértice de Σ es

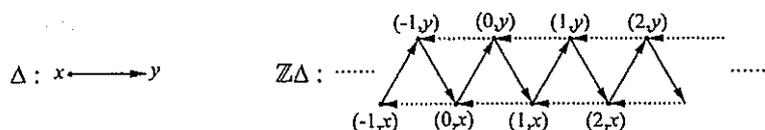
un vértice proyectivo si el mismo no pertenece al dominio de la aplicación τ , y que $x \in \Sigma_0$ es un vértice inyectivo si x no pertenece a la imagen de τ .

Por otra parte, si $\alpha : y \rightarrow x$ es una flecha y x es un vértice no proyectivo, entonces existe una única flecha $\tau(x) \rightarrow y$ en Σ_1 , que denotaremos $\sigma(\alpha)$. La aplicación σ se llama semitraslación, y está completamente determinada por τ .

Una manera de construir familias de gráficos de traslación es la que sigue. Sea Δ un grafo valuado sin lazos. El gráfico de traslación $\mathbb{Z}\Delta$ está dado por:

- i) $(\mathbb{Z}\Delta)_0 = \mathbb{Z} \times \Delta_0$
- ii) La traslación en $\mathbb{Z}\Delta$ está definida por $\tau(n, x) = (n - 1, x)$.
- iii) Las flechas en $\mathbb{Z}\Delta$ se definen del siguiente modo: para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$ con valuación (a, b) en Δ , hay flechas $\alpha_n : (n, x) \rightarrow (n, y)$ con valuación (a, b) y flechas $\sigma(\alpha_n) : (n - 1, y) \rightarrow (n, x)$ con valuación (b, a) .

Ejemplo 2.4.5.



Consideraremos ahora aplicaciones entre gráficos de traslación.

Definición 2.4.6. Sean (Σ', τ') y (Σ, τ) gráficos de traslación. Un morfismo de gráficos de traslación, $f : (\Sigma', \tau') \rightarrow (\Sigma, \tau)$, es un par de aplicaciones $f_0 : \Sigma'_0 \rightarrow \Sigma_0$ y $f_1 : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma_1$ que satisface las condiciones siguientes:

- i) f es un morfismo de gráficos valuados, es decir, si $\alpha : x \rightarrow y$ es una flecha en Σ'_1 con valuación (a, b) , entonces $f_1(\alpha)$ es una flecha en Σ_1 del vértice $f_0(x)$ en el vértice $f_0(y)$ con valuación (a, b) .
- ii) $f_0(\tau'(x)) = \tau(f_0(x))$, para todos los vértices no proyectivos x de Σ'_0 .

Definición 2.4.7. Sea (Σ, τ) un gráfico de traslación. Un grupo G formado por morfismos de traslación $f : (\Sigma, \tau) \rightarrow (\Sigma, \tau)$ se dice que actúa admisiblemente si cada órbita de G tiene a lo sumo un vértice en común con $\{x\} \cup x^-$ y a lo sumo un vértice en común con $\{x\} \cup x^+$, para cada x perteneciente a Σ_0 .

En las condiciones de la definición precedente se tiene que el cociente Σ/G es un gráfico de traslación.

Recordemos que si Λ es un álgebra de tipo de representación infinito y \mathcal{C} una componente del gráfico de Auslander – Reiten de Λ , que no contiene vértices proyectivos ni inyectivos, entonces la traslación y su inversa están definidas para cualquier vértice. Generalizando esta situación a gráficos de traslación, diremos que (Σ, τ) es un gráfico de traslación estable si la aplicación τ y su inversa están definidas para todo $x \in \Sigma_0$.

En el caso particular de un álgebra Λ autoinyectiva, suprimiendo en el gráfico de Auslander – Reiten de Λ los vértices correspondientes a los Λ -módulos proyectivos – inyectivos, se obtiene un subgráfico de traslación estable que notaremos Γ_Λ^s .

Teorema 2.4.8 (Riedtmann). *Sea Λ un álgebra indescomponible, autoinyectiva y de tipo de representación finito. Entonces Γ_Λ^s es isomorfo a $\mathbb{Z}\Delta/G$, donde $|\Delta|$ es un diagrama de Dynkin y G es un grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}\Delta$ que actúa admisiblemente.*

Sea ahora $T(\Lambda)$ la extensión trivial de un álgebra Λ . Entonces $T(\Lambda)$ es autoinyectiva, luego, si $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, se tiene, de acuerdo al Teorema 2.4.8 que $\Gamma_{T(\Lambda)}^s$ es isomorfo a $\mathbb{Z}\Delta/G$, donde Δ es un diagrama de Dynkin y G es un grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}\Delta$ que actúa admisiblemente. El tipo Dynkin de Δ está unívocamente determinado y se llama clase de Cartan de $T(\Lambda)$.

El teorema que sigue, debido a D. Hughes y J. Waschbüsch [HuW] (ver también [Ho2] y [BretLR]) muestra que la teoría de las álgebras inclinadas de tipo Dynkin Q está estrechamente relacionada con la de las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan Q .

Teorema 2.4.9 (Hughes – Waschbüsch). *Sea Λ un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q .
- ii) Existe un álgebra inclinada Λ' de tipo Dynkin Q tal que $T(\Lambda) \simeq T(\Lambda')$.

En lo que sigue, llamaremos al teorema anterior Teorema [HW].

I. Assem, D. Happel y O. Roldán probaron en [AsHR] el siguiente resultado que describe las álgebras cuyas extensiones triviales son de tipo de representación finito.

Teorema 2.4.10 (Assem – Happel – Roldán). *Sea Λ un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q .
- ii) Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Q .

En adelante, nos referiremos al teorema previo como Teorema [AHR].

Capítulo 3

Clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito

Si una extensión trivial $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, entonces Λ es de tipo de representación finito por ser cociente de $T(\Lambda)$. De aquí resulta, en particular, que Λ es schurian. Por otra parte, si $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, entonces Λ es triangular [Y2]. Además, sabemos que si un álgebra es schurian triangular y de tipo de representación finito, es isomorfa a un álgebra schurian triangular con caminos iguales. En este capítulo nos proponemos dar una clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito, para lo cual basta considerar extensiones triviales de álgebras schurian triangulares con caminos iguales.

En el **Capítulo 1** hemos descrito el diagrama ordinario y las relaciones de la extensión trivial de un álgebra schurian, y mostramos que el número de sumandos directos indescomponibles de $\text{r}P/\text{soc } P$, donde P es proyectivo indescomponible asociado al vértice $a \in Q_{T(\Lambda)}$, es igual al número de ciclos no congruentes en dicho vértice.

Por otra parte, un teorema de Bautista – Brenner [BaB] establece que si un álgebra de artin es de tipo de representación finito, entonces toda sucesión de Auslander – Reiten tiene a lo sumo cuatro términos en el medio.

Si aplicamos el teorema de Bautista – Brenner a $T(\Lambda)$ y a las sucesiones del tipo:

$$0 \rightarrow \text{r}P \rightarrow P \amalg \text{r}P/\text{soc } P \rightarrow P/\text{soc } P \rightarrow 0,$$

donde P es proyectivo indescomponible de $T(\Lambda)$ y tenemos en cuenta los resultados del **Capítulo 1**, para nuestra clasificación, podemos suponer que el número de ciclos no congruentes en cada vértice es a lo sumo tres. Consideraremos entonces los siguientes casos:

- i) Las extensiones triviales de un álgebra schurian triangular con caminos iguales cuyo diagrama posee un vértice con tres ciclos no congruentes.
- ii) Aquéllas tales que cada vértice de su diagrama tiene una única clase de congruencia.

- iii) Aquéllas cuyo diagrama posee un vértice con dos ciclos no congruentes y no posee vértices con tres ciclos no congruentes.

Una vez determinada en cada caso la familia de diagramas a estudiar y las relaciones a considerar sobre los mismos, sólo resta decidir cuándo las correspondientes álgebras de caminos son de tipo de representación finito, pero en general esto no resulta sencillo, especialmente cuando el álgebra está dada por un diagrama con ciclos orientados.

Podemos resolver el problema teniendo en cuenta lo siguiente:

- i) Dada una extensión trivial $T(\Lambda)$, donde Λ es schurian triangular con caminos iguales, resulta del **Corolario 1.3.19** que las álgebras Λ' tales que $T(\Lambda')$ es isomorfa a $T(\Lambda)$, son precisamente las que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo orientado de $Q_{T(\Lambda)}$
- ii) Para decidir si $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, es necesario y suficiente encontrar, entre todas las álgebras Λ' , alguna que sea inclinada de tipo Dynkin [HuW].

En cada caso, exhibimos tal Λ' o bien hallamos un cociente de $T(\Lambda)$ de tipo de representación infinito, lo que muestra que $T(\Lambda)$ es también de tipo infinito.

Cabe destacar que la tarea es particularmente sencilla cuando Λ' es hereditaria de tipo Dynkin o cuando un álgebra cociente de $T(\Lambda)$ es hereditaria, pero no de tipo Dynkin. Esto es frecuente, pero no siempre sucede. En el caso general, es de suma utilidad la lista [HV]. A veces, usaremos esta lista para mostrar que Λ' es de tipo de representación infinito y en otros casos, para probar que Λ' es inclinada de tipo Dynkin.

3.1 Extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio

El objetivo principal de esta sección es caracterizar las extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio.

Comenzamos con algunas observaciones y notaciones que serán de utilidad a lo largo de esta sección. Para un Λ -módulo M , notaremos con $\text{add } M$ a la subcategoría llena de $\text{mod } \Lambda$ que consiste de todas las sumas finitas de sumandos de M .

Observación 3.1.1. Es fácil ver, usando la dualidad, que un álgebra Λ es de tipo de representación finito si, y sólo si, Λ^{op} lo es. Se sabe también que si un álgebra Λ es de tipo de representación finito, entonces para todo Λ -módulo proyectivo P , $\text{End}_{\Lambda}(P)$ es de tipo de representación finito. Este hecho resulta de que el funtor $\text{Hom}_{\Lambda}(P, \cdot) : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \text{End}_{\Lambda}(P)^{\text{op}}$

define una equivalencia entre la categoría de los módulos con una presentación en $\text{add } P$ y $\text{mod } \text{End}_\Lambda(P)^{\text{op}}$.

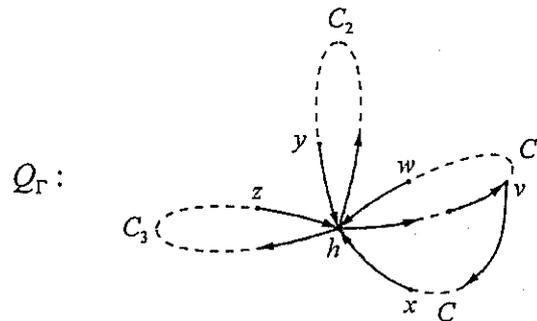
En adelante, si C es un ciclo orientado de $Q_{T(\Lambda)}$, designaremos \underline{C} al soporte de C , esto es, al subdiagrama de $Q_{T(\Lambda)}$ formado por los vértices y las flechas de C . Será conveniente, para un camino γ , escribir " $\gamma \in C$ " para indicar que γ tiene su soporte en \underline{C} . Análogamente, si C_1, \dots, C_r son ciclos orientados de $Q_{T(\Lambda)}$, escribiremos $C_1 \cap \dots \cap C_r$ para indicar el camino cuyo soporte es $\underline{C}_1 \cap \dots \cap \underline{C}_r$.

Probaremos a continuación que si existe un vértice h en $(Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que $rP_h/\text{soc } P_h$ tiene tres sumandos directos indescomponibles, entonces, cada clase de congruencia de ciclos en C_h (conjunto de los ciclos orientados con origen en h), tiene un único elemento.

Proposición 3.1.2. *Sea $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito y $h \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que el módulo $rP_h/\text{soc } P_h$ tiene tres sumandos directos indescomponibles. Entonces C_h tiene tres elementos.*

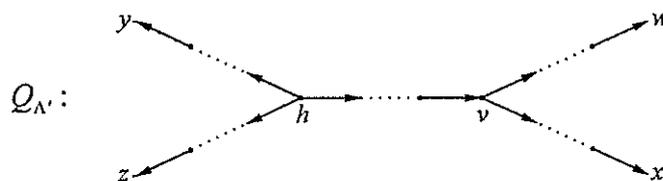
Demostración: Sea $C_h/\equiv = \{C_1, C_2, C_3\}$ y supongamos, por el absurdo, que existe $C' \in C_h$ con $C' \not\equiv C_1$ y $C' \neq C_1$. Elegimos en la clase de congruencia de C_1 un ciclo C tal que la intersección de C con C_1 sea maximal. Consideremos el álgebra Γ dada por el subdiagrama $\underline{C}_1 \cup \underline{C}_2 \cup \underline{C}_3 \cup \underline{C}$, con las relaciones inducidas. Es decir, $\Gamma = \text{End}_{T(\Lambda)}(P)^{\text{op}}$, donde P es la suma de todos los $T(\Lambda)$ -módulos proyectivos indescomponibles P_k , con k vértice de $\underline{C}_1 \cup \underline{C}_2 \cup \underline{C}_3 \cup \underline{C}$.

Si C y C_1 tienen una flecha en común con origen en h , entonces:



Notemos que $w \neq v$, si no la flecha de v en h en C_1 sería igual al camino de v en h en el ciclo C , lo que es absurdo, pues las relaciones son admisibles.

Eliminando las flechas que llegan al vértice h en cada uno de los ciclos, resulta que Γ es la extensión trivial del álgebra Λ' definida por el siguiente diagrama sin relaciones:



Luego Λ' es de tipo de representación infinito, lo que implica $\Gamma = T(\Lambda')$ de tipo de representación infinito, contradiciendo la hipótesis.

En el caso en que C y C_1 tienen una flecha en común con fin en h , se llega a la misma conclusión por un razonamiento totalmente análogo. ■

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.1.3. *Sea $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito y $h \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que el módulo $rP_h/\text{soc } P_h$ tiene tres sumandos directos indescomponibles. Entonces al menos uno de los ciclos de C_h es de longitud dos.*

Demostración: Sabemos, por la proposición anterior, que $C_h = C_h/\equiv = \{C_1, C_2, C_3\}$ con $\text{long}(C_i) \geq 2$ para $i = 1, 2, 3$. Consideremos el álgebra Γ definida por el subdiagrama $\underline{C_1} \cup \underline{C_2} \cup \underline{C_3}$ con las relaciones inducidas. Es claro que Γ es la extensión trivial del álgebra hereditaria Λ' dada por el diagrama que se obtiene eliminando de cada C_i la flecha que llega al vértice h . Si $\text{long}(C_i) > 2$ para $i = 1, 2, 3$, entonces Λ' es de tipo de representación infinito y de aquí resulta que Γ es de tipo de representación infinito. Esta contradicción prueba que alguno de los ciclos de C_h tiene longitud dos. ■

Según vimos en la **Proposición 3.1.2**, cada clase de congruencia de ciclos en C_h tiene un único elemento. Probaremos a continuación que lo mismo ocurre para cualquier vértice de $Q_{T(\Lambda)}$.

Proposición 3.1.4. *Sea $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito con $h \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que el módulo $rP_h/\text{soc } P_h$ tiene tres sumandos directos indescomponibles. Si C y C' son ciclos cuyos soportes no son disjuntos, entonces tienen en común un único vértice de $Q_{T(\Lambda)}$.*

Demostración: Sea m el número de ciclos orientados no nulos en $T(\Lambda)$, salvo reordenamiento de flechas. Razonamos por inducción en m . Por hipótesis se tiene $m \geq 3$ y es claro que de la **Proposición 3.1.2** se sigue la validez del resultado para $m = 3$.

Supongamos ahora que $m > 3$ y que existen ciclos C y C' en $Q_{T(\Lambda)}$ tales que $\underline{C} \cap \underline{C'}$ es un camino p de longitud mayor o igual que uno y $C' \notin C_h$. Sea Q un subdiagrama conexo de $Q_{T(\Lambda)}$ con el menor número de ciclos y tal que los tres ciclos de C_h y C' están en Q .

Si C es un ciclo de Q , consideramos el álgebra Γ dada por todos los ciclos de Q , excepto C' , con las relaciones inducidas. En caso contrario hemos de considerar el álgebra dada por todos los ciclos de Q . Nos limitaremos a estudiar el primer caso, ya que el otro es totalmente análogo.

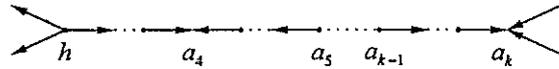
De la hipótesis inductiva resulta que la intersección de dos ciclos no disjuntos de Q_Γ es un punto. De aquí, y por construcción, podemos suponer que si $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k = C$, con $k < m$ son los ciclos de Q_Γ , entonces: $C_h = \{C_1, C_2, C_3\}$, $C_i \cap C_{i+1} = \{a_{i+1}\}$ para $i = 3, \dots, k-1$ y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

Ahora elegimos en C_1 y C_2 la flecha que sale de h , en C_3 el camino $h \rightarrow a_4$, en C_4 el camino

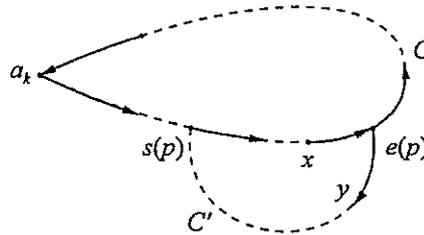
$a_5 \rightarrow a_4$, en C_5 el camino $a_5 \rightarrow a_6$, y así siguiendo hasta llegar al vértice a_k . Es claro que se obtiene uno de los siguientes subdiagramas sin relaciones:



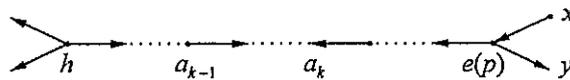
Supongamos que se obtiene el diagrama dado en (a) (el caso (b) es análogo). Si $s(p) = a_k$ consideramos, tanto en C como en C' , la flecha que llega al vértice a_k , obteniendo el siguiente subdiagrama:



de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, contradiciendo el hecho que $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito. Si fuera $s(p) \neq a_k$, elegimos en C' la flecha con origen $e(p)$, en C la flecha que llega a $e(p)$ y el camino $e(p) \rightarrow a_k$, según muestra el diagrama:



Procediendo de esta manera se tiene el subdiagrama:



contradiciendo nuevamente la hipótesis. Luego, dos ciclos no disjuntos de $Q_{T(\Lambda)}$ sólo pueden tener en común un vértice. **■**

Proposición 3.1.5. *Si $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, entonces existe a lo sumo una sucesión de Auslander - Reiten en $\text{mod} T(\Lambda)$ con cuatro términos en el medio.*

Demostración: Supongamos que la extensión trivial $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito y admite dos sucesiones de Auslander - Reiten con cuatro términos en el medio. Entonces existen vértices distintos h y h' en $Q_{T(\Lambda)}$ con tres ciclos no congruentes en h y h' , respectivamente. Además, de las proposiciones (3.1.2) y (3.1.4) sabemos que C_h y $C_{h'}$ tienen tres elementos y que la intersección de dos ciclos no disjuntos de $Q_{T(\Lambda)}$ es un vértice.

Razonando como en la demostración precedente, resulta que existen ciclos

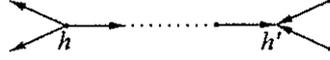
$$C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_{t-2}, C_{t-1}, C_t$$

en $Q_{T(\Lambda)}$, con $t \geq 5$, que verifican:

$$(a) C_h = \{C_1, C_2, C_3\}; \quad C_{h'} = \{C_{t-2}, C_{t-1}, C_t\}.$$

(b) Si $3 \leq i \leq t - 3$, entonces $C_i \cap C_{i+1} = \{a_{i+1}\}$. Además $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

Si $t = 5$ los vértices h y h' pertenecen al ciclo C_3 . Seleccionando en C_1 y C_2 las flechas con origen en h , en C_3 el camino $h \rightarrow h'$, en C_4 y C_5 las flechas que terminan en h' , se obtiene el subdiagrama

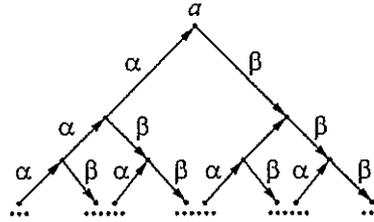


de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, contradiciendo el hecho que $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito.

Supongamos ahora $t > 5$. Consideramos en C_1 y C_2 las flechas que salen de h , en C_3 el camino $h \rightarrow a_4$, en C_4 el camino $a_5 \rightarrow a_4$ y así hasta llegar al vértice a_{t-2} . Si el último camino considerado tiene fin (origen) en a_{t-2} , entonces eligiendo en C_{t-2} el camino $h' \rightarrow a_{t-2}$ ($a_{t-2} \rightarrow h'$), en C_{t-1} y C_t las flechas con origen (fin) en h' , se obtiene nuevamente un subdiagrama de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, lo que contradice la hipótesis y completa la demostración. ■

Vamos a dar ahora una serie de definiciones y resultados que utilizaremos para caracterizar las extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio. Comenzamos con el concepto de ramo truncado. El mismo fue introducido por Ringel en [Rin] usando el término *ramo*, pero a partir de que Assem y Skowrónski extendieron este concepto en [AsNS] y [AsS3] se utiliza el término ramo para dicha generalización y el de ramo truncado para la noción dada por Ringel.

Definición 3.1.6. Un ramo truncado en a de longitud r es un subdiagrama Q finito, lleno y conexo del siguiente árbol:



con todas las posibles relaciones de la forma $\beta\alpha = 0$, tal que Q tiene r vértices y a es un vértice de Q .

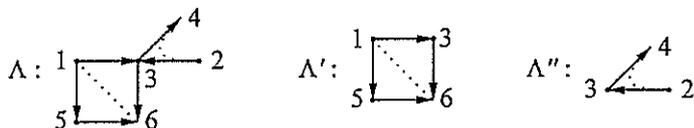
Las flechas, según sea su orientación, se dicen flechas de tipo α o bien, flechas de tipo β . Diremos que un camino es un camino de α -flechas (respectivamente camino de β -flechas) si está compuesto solamente por flechas de tipo α (respectivamente β).

Definición 3.1.7. Sean $\Lambda = kQ/I$, $\Lambda' = kQ'/I \cap kQ'$ y $\Lambda'' = kQ''/I \cap kQ''$, con Q' , Q'' subdiagramas llenos de Q y a un vértice de Q . Diremos que Λ se obtiene de Λ' agregando el ramo truncado Λ'' en a , si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Λ'' es un ramo truncado en a .

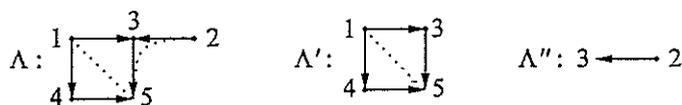
- ii) $Q_0 = Q'_0 \cup Q''_0, Q'_0 \cap Q''_0 = \{a\}$.
- iii) I está generado por $I \cap kQ'$ e $I \cap kQ''$.

Ejemplo 3.1.8. Sean Λ, Λ' y Λ'' las álgebras dadas por los siguientes diagramas con relaciones:



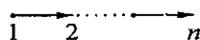
Entonces, Λ se obtiene de Λ' agregando el ramo truncado Λ'' en el vértice 3.

Ejemplo 3.1.9. Consideremos las álgebras Λ, Λ' y Λ'' dadas por los siguientes diagrama con relaciones:



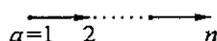
Es claro que Λ' y Λ'' satisfacen las condiciones de la definición precedente, excepto (iii).

Teorema 3.1.10 (Happel – Ringel). Sea Λ el álgebra de caminos del diagrama \mathbb{A}_n :



y ${}_{\Lambda}U$ un Λ -módulo inclinante libre de multiplicidad. Entonces $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(U)^{op}$ es un ramo truncado de longitud n en a , donde a corresponde al único Λ -módulo proyectivo – inyectivo. Más aún, cualquier ramo truncado en a de longitud n es de esta forma.

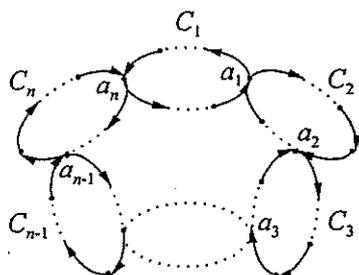
Corolario 3.1.11. Sea Λ una k -álgebra tal que Λ se obtiene de Λ' agregando un ramo truncado Λ'' de longitud n en el vértice a . Sea Γ la k -álgebra que se obtiene de Λ' agregando en a el álgebra de caminos del diagrama:



Entonces, existe ${}_{\Lambda}U$, Λ -módulo inclinante tal que $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(U)^{op}$.

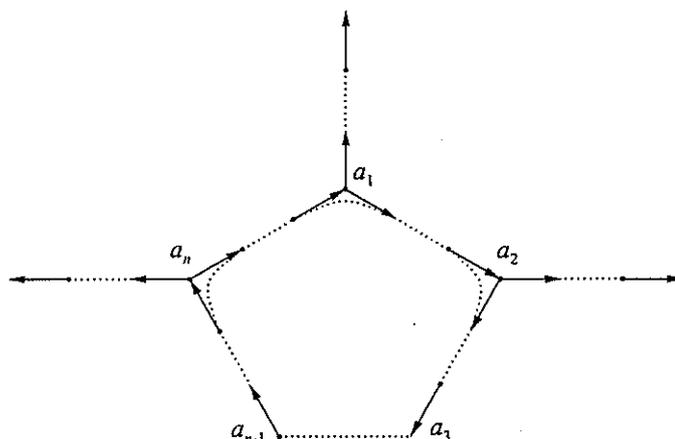
Damos a continuación un lema necesario para la demostración del resultado principal de la sección.

Lema 3.1.12. Sea $\Gamma = kQ_{\Gamma}/I$ un álgebra para la cual se satisfacen las condiciones de la Proposición 1.3.22. Supongamos que Q_{Γ} es:



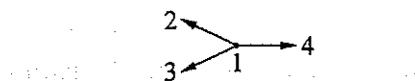
donde C_1, \dots, C_n , con $n \geq 3$, son todos los ciclos orientados no nulos en Γ , salvo reordenamiento de flechas. Entonces Γ es de tipo de representación infinito.

Demostración: Eliminando en cada uno de los ciclos orientados no nulos C_1, \dots, C_n , las flechas que llegan a los vértices a_n, a_1, \dots, a_{n-1} , respectivamente, se obtiene el álgebra Λ dada por el diagrama con relaciones siguiente:



Como $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ y Λ no es triangular, entonces Γ es de tipo de representación infinito. ▮

Teorema 3.1.13. Las extensiones triviales de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio son las extensiones triviales de las álgebras que se obtienen de



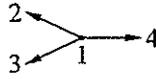
- (a) Agregando un ramo truncado en el vértice 4, o bien
- (b) Agregando un ramo truncado de longitud dos en el vértice 3 y un ramo truncado de longitud mayor que uno y a lo sumo cuatro en el vértice 4.

Demostración: Sea $T(\Lambda)$ de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio. Demostraremos por inducción en el número de ciclos orientados no nulos m (salvo reordenamiento de flechas), que $T(\Lambda)$ es la extensión trivial de una de las álgebras indicadas en el enunciado.

Es claro que esto es cierto si $m = 3$. Sea entonces $m > 3$ y sea $h \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que $C_h = \{C_1, C_2, C_3\}$. Se sigue de la Proposición 3.1.4 y del lema previo, que existe un ciclo C que no contiene al vértice h y es no disjunto con un único ciclo C' .

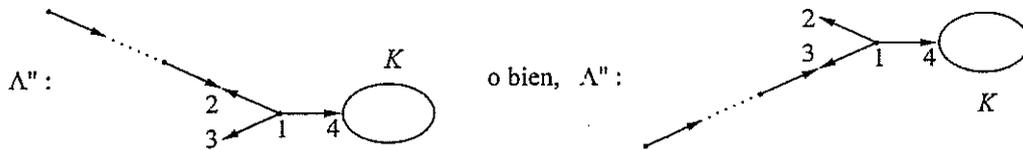
Sea Γ el álgebra dada por todos los ciclos de $Q_{T(\Lambda)}$, excepto C , con las relaciones inducidas. Así Γ es una extensión trivial de tipo de representación finito con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio y con $m - 1$ ciclos en su diagrama ordinario. En

consecuencia, por hipótesis inductiva, se tiene que Γ es la extensión trivial de un álgebra Λ' que se obtiene de



agregando un ramo truncado en el vértice 4, o bien agregando un ramo truncado de longitud dos en el vértice 3 y un ramo truncado de longitud mayor que uno y a lo sumo cuatro en el vértice 4.

Sea $\{d\} = C \cap C'$. Supongamos que Λ' verifica (a). Si $d = 2$ o bien $d = 3$, eliminando de C la flecha que sale de d , se obtiene un álgebra Λ'' de la siguiente forma:



donde K es el ramo truncado agregado en el vértice 4. Del Corolario 3.1.11 resulta que Λ'' es inclinada de tipo Q . Como además $T(\Lambda'') \simeq T(\Lambda)$ y $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, se tiene que Q es un diagrama de tipo Dynkin \mathbb{D}_n o bien, \mathbb{E}_p , con $p = 6, 7, 8$. Luego, renombrando los vértices, si fuera necesario, es claro que Λ'' satisface (a) o bien (b).

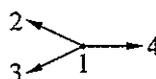
Supongamos ahora que d es un vértice del ramo truncado agregado en 4. Si la longitud del ramo es uno, entonces $d = 4$. Eliminando, como antes, del ciclo C la flecha que sale de d , resulta un álgebra Λ'' correspondiente al caso (a) y tal que $T(\Lambda'') \simeq T(\Lambda)$.

Si la longitud del ramo truncado es mayor que uno, entonces d está en un camino de α -flechas o bien, de β -flechas, ya que C es no disjuncto sólo con C' . Eliminando de C la flecha que llega a d , si d está en un camino de α -flechas (o que sale de d en el otro caso), se obtiene un álgebra Λ'' correspondiente al caso (a) con $T(\Lambda'') \simeq T(\Lambda)$.

Supongamos ahora que Λ' verifica (b). En este caso d es necesariamente un vértice del ramo truncado agregado en 4, porque en caso contrario, es fácil ver que eliminando de C la flecha que sale o llega a (b), resulta un álgebra Λ'' inclinada de tipo Q , donde Q no es Dynkin, lo que es una contradicción, pues $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito.

Sea pues d un vértice del ramo truncado agregado en 4, de nuevo, se elimina de C la flecha que llega o sale de d , dependiendo de que d esté en un camino de α -flechas o bien, de β -flechas, respectivamente. El álgebra Λ'' que así resulta es inclinada de tipo Q y como $T(\Lambda'') \simeq T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, es claro que Q es de tipo Dynkin \mathbb{E}_p , con $p = 7, 8$. Luego, Λ'' satisface (b) y esto completa la primera parte de la demostración del teorema.

Recíprocamente, sea Λ un álgebra que se obtiene de

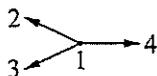


agregando un ramo truncado en el vértice 4. Del Corolario 3.1.11 resulta que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n y de aquí, $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n . Por otra parte,

$$0 \rightarrow \mathfrak{r}P_1 \rightarrow P_1 \amalg \mathfrak{r}P_1/\text{soc } P_1 \rightarrow P_1/\text{soc } P_1 \rightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander – Reiten en $\text{mod}T(\Lambda)$ con cuatro términos en el medio, puesto que el número de ciclos no congruentes en el vértice 1 es tres.

Si, en cambio, Λ se obtiene de



agregando un ramo truncado de longitud dos en el vértice 3 y un ramo truncado de longitud mayor que uno y a lo sumo cuatro en el vértice 4, se deduce del Corolario 3.1.11 que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_p , con $p = 6, 7, 8$. En consecuencia $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_p y

$$0 \rightarrow \mathfrak{r}P_1 \rightarrow P_1 \amalg \mathfrak{r}P_1/\text{soc } P_1 \rightarrow P_1/\text{soc } P_1 \rightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander – Reiten en $\text{mod}T(\Lambda)$ con cuatro términos en el medio. \blacksquare

3.2 Extensiones triviales de tipo de representación finito con $\mathfrak{r}P/\text{soc } P$ indescomponible para todo P

En esta sección daremos una clasificación completa, salvo dualidad, de las extensiones triviales de tipo de representación finito con $\mathfrak{r}P/\text{soc } P$ indescomponible para todo módulo proyectivo indescomponible P . Además, en cada lista sólo incluiremos el diagrama de las extensiones triviales, sin indicar las relaciones, por razones de simplicidad.

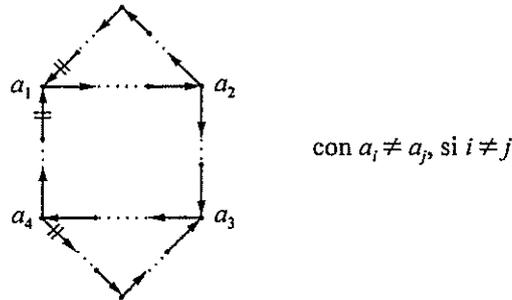
Es claro que si Γ es una extensión trivial con $\mathfrak{r}P/\text{soc } P$ indescomponible para todo P , entonces para todo vértice i del diagrama ordinario de Γ , los ciclos que lo contienen son congruentes. Sea $a \in (Q_\Gamma)_0$ un vértice con el mayor número de ciclos congruentes y sea n_a dicho número. Para establecer nuestra clasificación hemos de considerar los distintos valores posibles de n_a .

3.2.1 Caso $n_a = 1$

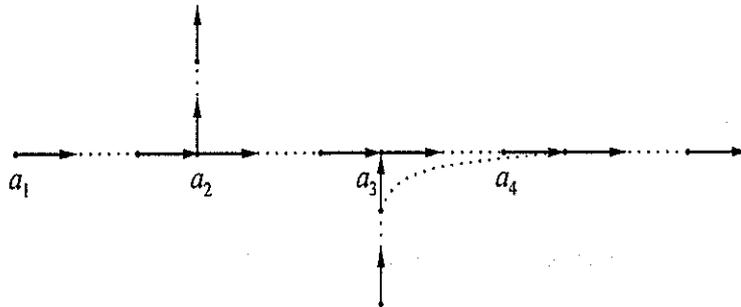
En este caso, el diagrama de la extensión trivial Γ tiene un único ciclo C . Eliminando una flecha de C , se obtiene un álgebra Λ , hereditaria de tipo Dynkin \mathbb{A}_n , tal que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$. De aquí resulta, en virtud del Teorema [HW], que Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n .

3.2.2 Caso $n_a = 2$

Notemos, en primer lugar, que una extensión trivial Γ , de tipo de representación finito, con $n_a = 2$, tiene exactamente dos ciclos en su diagrama ordinario. En efecto, si así no fuera, tendríamos el siguiente subdiagrama de Q_Γ :

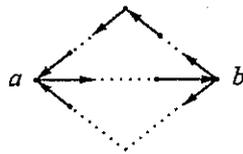


Eliminando de cada ciclo las flechas indicadas con “//” (convención que adoptaremos de aquí en adelante), resulta que el álgebra dada por el siguiente diagrama con relaciones:



es de tipo de representación infinito, pues contiene un subdiagrama convexo de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, contradiciendo el hecho que Γ es de tipo de representación finito.

Sea entonces Q_Γ :



Eliminando de cada ciclo las flechas que llegan al vértice a se tiene: $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, donde Λ es el álgebra hereditaria dada por el diagrama:

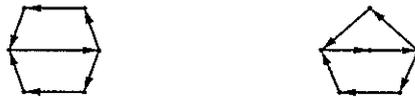


Ahora bien, como Λ debe ser de tipo Dynkin, analizando la longitud de los caminos que salen o llegan al vértice b surge que el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:

De clase de Cartan \mathbb{D}_n :



De clase de Cartan \mathbb{E}_6 :



De clase de Cartan \mathbb{E}_7 :



De clase de Cartan \mathbb{E}_8 :



3.2.3 Minimales con $n_a \geq 3$

Diremos que una extensión trivial es minimal si su diagrama ordinario no se puede obtener del diagrama ordinario de otra extensión trivial por agrandamientos de ciclos, es decir, agregando flechas a uno o más ciclos. Por ejemplo, consideremos las extensiones triviales cuyos diagramas ordinarios son, respectivamente:



Γ_1 es una extensión trivial minimal, en cambio, Γ_2 no es minimal, pues se obtiene de Γ_1 agrandando la intersección de los ciclos.

En el teorema siguiente, enumeramos las extensiones triviales minimales de tipo de representación finito con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo P , que satisfacen la condición $n_a \geq 3$, indicando la clase de Cartan de cada una de ellas.

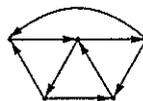
Teorema 3.2.1. *Las extensiones triviales minimales de tipo de representación finito con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo P , que satisfacen la condición $n_a \geq 3$, se muestran en la siguiente tabla:*

	$n_a = 3$	$n_a = 4$	$n_a = 5$
Clase \mathbb{D}_n			
Clase \mathbb{E}_6			
Clase \mathbb{E}_7			
Clase \mathbb{E}_8			

Las siguientes observaciones serán de utilidad en la demostración del teorema.

Observación 3.2.2. Sea Γ una extensión trivial. Si dos ciclos no nulos en Γ tienen dos flechas consecutivas en común, entonces ambos tienen longitud mayor o igual que cuatro. En efecto, sean C y C' ciclos no nulos en Γ , tales que las flechas $\alpha_1 : b \rightarrow c$ y $\alpha_2 : c \rightarrow d$ son comunes a los mismos. Supongamos por el absurdo que la longitud de C es tres, entonces el suplemento de $\alpha_2 \alpha_1$ es una flecha β . Por otro lado, $\alpha_2 \alpha_1$ tiene un suplemento μ en C' . Como Γ es una extensión trivial, debe ser $\beta = \mu$, lo cual es una contradicción pues las relaciones son admisibles.

Observación 3.2.3. La extensión trivial Γ dada por el diagrama:

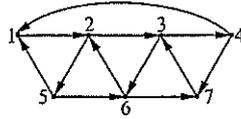


con las relaciones correspondientes, es de tipo de representación infinito pues $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, donde Λ es el álgebra de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_4$:



De aquí, y de la **Observación 3.2.2** resulta que agregando solamente una flecha a cualquiera de las álgebras listadas en el **Teorema 3.2.1**, se obtienen extensiones triviales de tipo de representación infinito. En efecto, las álgebras que se pueden formar de esta manera siempre son de tipo de representación infinito, pues tienen un módulo proyectivo P tal que $\text{End}(P) \simeq \Gamma$.

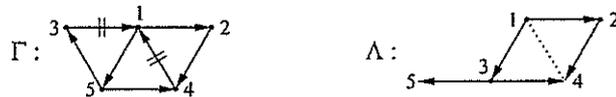
Por ejemplo, para el álgebra:



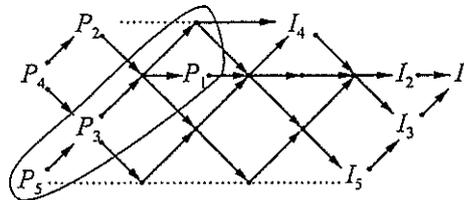
basta elegir $P = P_1 \amalg P_2 \amalg P_5 \amalg P_4 \amalg P_7$.

Demostración: (del teorema 3.2.1) Es claro que las extensiones triviales listadas en el teorema son minimales y verifican la condición $n_a \geq 3$. Según el Teorema [HW], para probar que cada una de las álgebras Γ enumeradas es de tipo de representación finito e indicar su clase de Cartan Q , basta hallar un álgebra Λ inclinada de tipo Dynkin Q , tal que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$. Por consiguiente, mostraremos a continuación cómo obtener en cada caso el álgebra Λ .

i) Para la extensión trivial:



El álgebra Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_5 pues, como podemos ver, el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene una sección completa de tipo \mathbb{D}_5 :

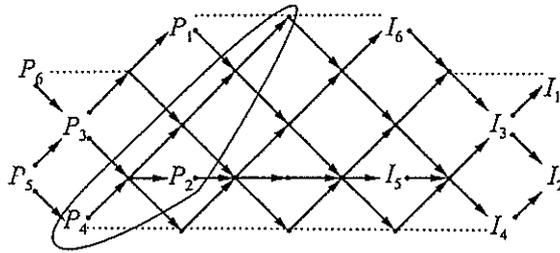


ii) Para la extensión trivial:

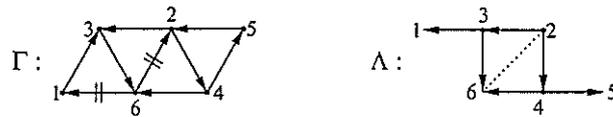


Mostramos a continuación que el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene una sección

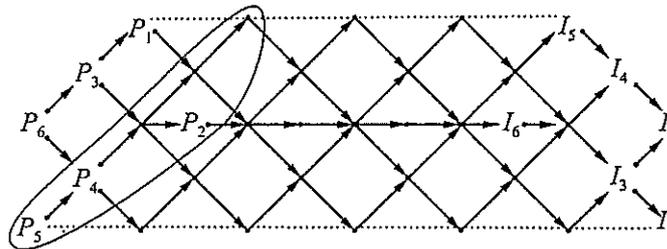
completa de tipo \mathbb{D}_5 , de donde resulta que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_5 :



iii) Para la extensión trivial:



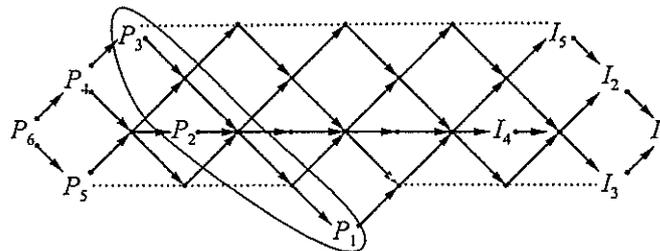
Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , como se observa en su gráfico de Auslander – Reiten:



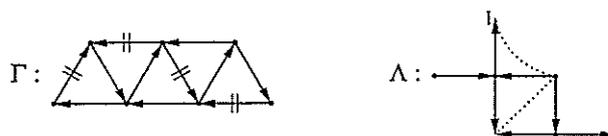
iv) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , pues, como se muestra a continuación, el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene una sección completa de tipo \mathbb{E}_6 :



v) Para la extensión trivial:



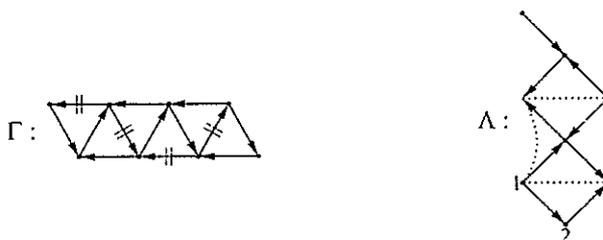
Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (6) de la lista [HV], en consecuencia, Λ es inclinada de tipo Dynkin y como $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es una subcategoría convexa de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , de acuerdo con (iii), se tiene que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 .

vi) Para la extensión trivial:



Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (2) de la lista [HV], luego Λ es inclinada de tipo Dynkin y como $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es una subcategoría convexa inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , ya que su extensión trivial es isomorfa a la dada en (iv), concluimos que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 .

vii) Para la extensión trivial:

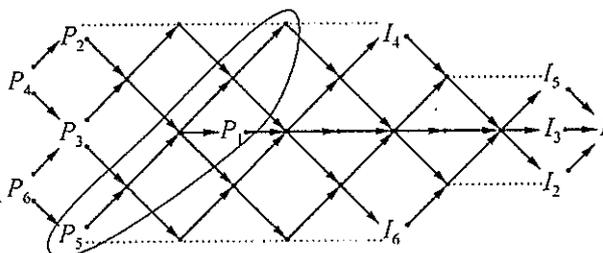


El álgebra Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (72) de la lista [HV], luego Λ es inclinada de tipo Dynkin y como $\Lambda/\langle e_1, e_2 \rangle$ es una subcategoría convexa inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , se deduce que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

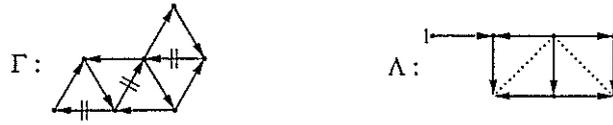
viii) Para la extensión trivial:



El álgebra Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , pues como se muestra a continuación, el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene una sección completa de tipo \mathbb{E}_6 :



ix) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$ correspondiente a la clase (12) de la lista [HV] y además $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , según mostramos en (viii).

x) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , ya que es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (1) de la lista [HV] y además $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , de acuerdo a lo que se mostró en (iii).

xi) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (11) de la lista [HV] y $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo \mathbb{E}_6 , como vimos en (iv).

xii) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , ya que es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (11) de la lista [HV] y $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo \mathbb{E}_6 , de acuerdo a lo que se probó en (iv).

xiii) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (71) de la lista [HV] y $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada

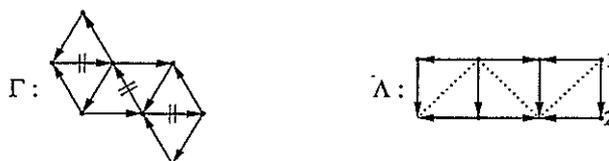
de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , según vimos en (ix).

xiv) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (56) de la lista [HV] y $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , de acuerdo con (ix).

xv) Para la extensión trivial:



Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (96) de la lista [HV]. En consecuencia Λ es inclinada de tipo Dynkin y como $\Lambda/\langle e_1, e_2 \rangle$ es inclinada de tipo \mathbb{E}_6 , según vimos en (viii), concluimos que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

xvi) Para la extensión trivial:



Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (50) de la lista [HV]. Además $\Lambda/\langle e_1, e_2 \rangle$ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , ya que su extensión trivial es isomorfa a la dada en (iv). De aquí resulta que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

xvii) Para la extensión trivial:



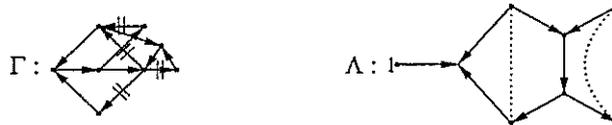
Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (26) de la lista [HV]. Además $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , según vimos en (vi). Se concluye entonces que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

xviii) Para la extensión trivial:



El álgebra Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (24) de la lista [HV] y $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , de acuerdo a lo visto en (xi).

xix) Para la extensión trivial:



Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (44) de la lista [HV], en consecuencia Λ es inclinada de tipo Dynkin. Por otra parte, la extensión trivial de $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es el álgebra opuesta de la dada en (vi), lo que prueba que $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_7 y de aquí resulta que Λ es inclinada de tipo \mathbb{E}_7 .

xx) Para la extensión trivial:



Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , pues es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, correspondiente a la clase (12) de la lista [HV] y además $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , según mostramos en (viii).

xxi) Para la extensión trivial:



Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (33) de la lista [HV]. Como además $\Lambda/\langle e_1, e_2 \rangle$ es una subcategoría convexa de Λ inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , se tiene que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

xxii) Para la extensión trivial:



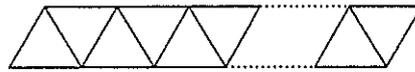
Λ es cociente por una fuente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, correspondiente a la clase (70) de la lista [HV]. De aquí, Λ es inclinada de tipo Dynkin. Como la extensión trivial de $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es isomorfa al álgebra opuesta de la dada en (xi), se tiene que $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 . Por lo tanto Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

Veamos ahora que la lista está completa. Para ello probaremos que si Q es un diagrama que no está en la lista y $\Gamma = kQ/I$ es una extensión trivial minimal con $rP/\text{soc } P$ indescomponible y $n_a \geq 3$, entonces Γ es de tipo de representación infinito.

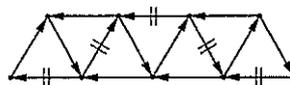
(1) Supongamos que $n_a = 3$. Tenemos los siguientes subcasos:

(1a) Sea Q un diagrama que no está en la lista tal que la intersección de tres ciclos no disjuntos cualesquiera de Q es un vértice.

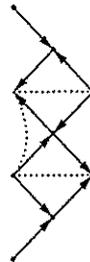
Las condiciones impuestas y la Observación 3.2.3 implican que todos los diagramas a considerar son de la forma:



y tienen al menos siete ciclos. Ahora bien, por la Observación 3.1.1 basta probar que el álgebra $\Gamma = kQ/I$ es de tipo infinito, donde Q es:

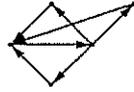


En efecto, eliminando las flechas indicadas en Q se obtiene el álgebra Λ dada por el diagrama con relaciones que sigue:

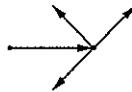


Como Λ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_8$, Λ es de tipo de representación infinito y de aquí, $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ también lo es.

- (1b) Supongamos que hay al menos tres ciclos no disjuntos que se cortan en un camino de longitud mayor o igual que uno. Entonces el diagrama Q no considerado en la lista, que tiene el menor número de vértices y satisface las condiciones impuestas es:



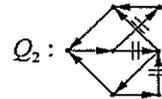
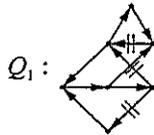
La extensión trivial dada por el mismo, con las relaciones correspondientes, es de tipo de representación infinito, pues es isomorfa a la extensión trivial del álgebra hereditaria de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_4$ que mostramos a continuación:



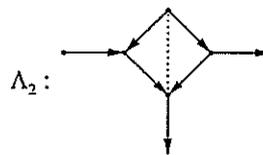
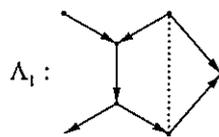
De acuerdo con la **Observación 3.2.3**, los restantes diagramas a considerar que no aparecen en la lista y verifican las condiciones requeridas se obtienen de:



agregando un vértice de modo apropiado. Ellos son:



Las extensiones triviales Γ_1 dada por Q_1 y Γ_2 dada por Q_2 , con las relaciones correspondientes, son de tipo de representación infinito, pues eliminando las flechas indicadas en Q_1 y Q_2 se obtienen, respectivamente, las álgebras:



Ambas son álgebras de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$ de la lista [HV]. Se concluye que que Γ_1 y Γ_2 son de tipo de representación infinito. Por otra parte, si a la extensión trivial:



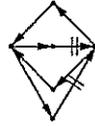
se le agrega un vértice, se obtiene un diagrama Q tal que la extensión trivial minimal $\Gamma = kQ/I$ no satisface la condición $n_a = 3$.

El análisis precedente muestra que en el caso $n_a = 3$, la lista está completa.

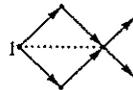
- (2) Sea ahora $n_a = 4$. Como antes, separamos el estudio en dos subcasos:

(2a) Supongamos que Q no es un diagrama de la lista y que la intersección de tres ciclos cualesquiera de Q es un vértice.

Entonces, con cuatro ciclos se tiene el diagrama Q :

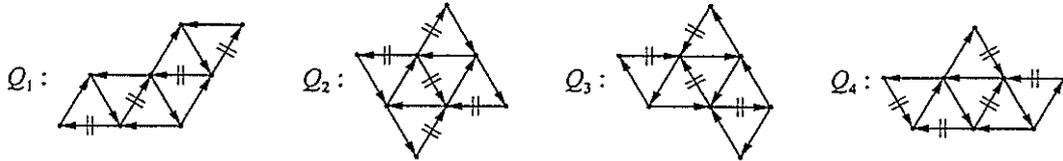


Sea Γ la extensión trivial dada por Q con las relaciones correspondientes. Eliminando las flechas señaladas, se obtiene el álgebra Λ que sigue:

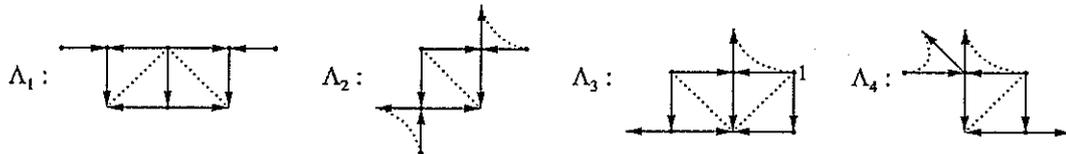


Puesto que el álgebra cociente $\Lambda/\Lambda e_1 \Lambda$ es de tipo de representación infinito, se deduce que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ también lo es.

Teniendo en cuenta la **Observación 3.2.3** y haciendo un sencillo análisis se ve que los restantes diagramas a considerar, con a lo sumo ocho vértices son:



Las extensiones triviales Λ_i correspondientes, con $i = 1, \dots, 4$, son de tipo de representación infinito. En efecto, eliminando en cada caso las flechas indicadas se obtienen, respectivamente, las álgebras:

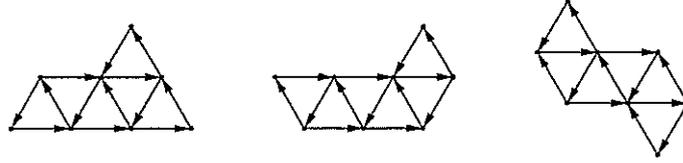


Para $i = 1, 2, 4$, Λ_i es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$. Por lo tanto Λ_i es de tipo de representación infinito, y en consecuencia $\Gamma_i \simeq T(\Lambda_i)$ también lo es.

Como $\Lambda_3/\Lambda_3 e_1 \Lambda_3$ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$, se tiene que Λ_3 , y por lo tanto $\Gamma_3 \simeq T(\Lambda_3)$, son de tipo de representación infinito.

Sea ahora Γ una extensión trivial minimal con siete o más ciclos y que satisface las condiciones pedidas, entonces Q tiene al menos nueve vértices y contiene como subdiagrama a Q_{Γ_j} , donde Γ_j es una de las siguientes extensiones triviales listadas

en el teorema:



De aquí es fácil ver que si se elimina de cada uno de los ciclos orientados que no están en Q_Γ , exactamente una flecha no perteneciente a $(Q_\Gamma)_1$, y en los restantes ciclos de Q_Γ exactamente una flecha, se obtiene un álgebra Λ , que contiene una subcategoría convexa llena Λ' , con Λ' inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

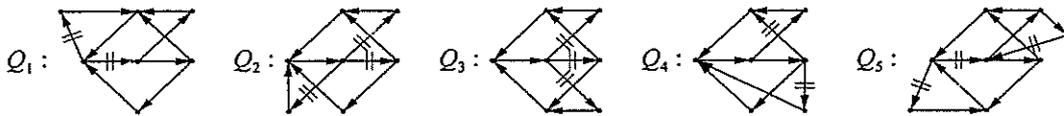
Supongamos por el absurdo que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito, luego como Q_Γ tiene al menos nueve vértices y Γ no es de clase de Cartan \mathbb{A}_n , se tiene que Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n , con $n \geq 9$. Esto es una contradicción, pues toda subcategoría convexa llena de un álgebra inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n , es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{A}_m ó \mathbb{D}_m , con $m \leq n$.

- (2b) Supongamos ahora que Q no es un diagrama de la lista y que hay al menos tres ciclos orientados no disjuntos en Q cuya intersección es un camino de longitud mayor o igual que uno. En estas condiciones, Q contiene como subdiagrama a



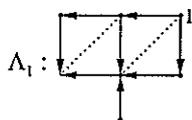
Un razonamiento similar al empleado en el caso previo, muestra que $\Gamma = kQ/I \simeq T(\Lambda)$, donde Λ contiene una subcategoría convexa llena Λ' , con Λ' inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 . Luego si el número de vértices de Q es mayor o igual que nueve, se tiene que Λ no es inclinada iterada de tipo \mathbb{D}_m . Por otra parte, como $n_a \neq 1$, Λ no es inclinada iterada de tipo \mathbb{A}_m . En consecuencia $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ es de tipo de representación infinito.

Sea ahora Q , con a lo sumo ocho vértices. De acuerdo a la **Observación 3.1.1**, tenemos sólo que analizar los siguientes casos:



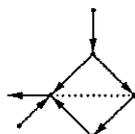
Para cada $i = 1, \dots, 5$, sea Γ_i la extensión trivial dada por Q_i con las relaciones correspondientes. Mostraremos en cada caso un álgebra Λ_i de tipo de representación infinito tal que $T(\Lambda_i) \simeq \Gamma_i$, lo que prueba que Γ_i es de tipo de representación infinito.

Para Γ_1 , eliminando las flechas indicadas se obtiene el álgebra:



Ahora bien, $\Lambda_1/\Lambda_1 e_1 \Lambda_1$ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_5$, lo que prueba que Λ_1 es de tipo de representación infinito.

La extensión trivial Γ_2 es isomorfa a $T(\Lambda_2)$, donde Λ_2 es el álgebra dada por:

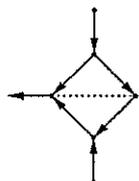


Como Λ_2 contiene el subdiagrama convexo lleno de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_4$:



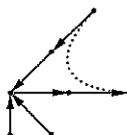
resulta que Λ_2 es de tipo infinito.

Dada Γ_3 , si eliminamos las flechas señaladas, resulta el álgebra Λ_3 dada por:



La misma es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$ y por lo tanto es de tipo de representación infinito.

La extensión trivial Γ_4 es isomorfa a $T(\Lambda_4)$, donde Λ_4 está dada por el siguiente diagrama con relaciones:

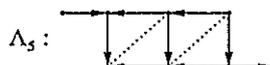


Puesto que Λ_4 contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_4$, que es:



concluimos que Λ_4 es de tipo de representación infinito.

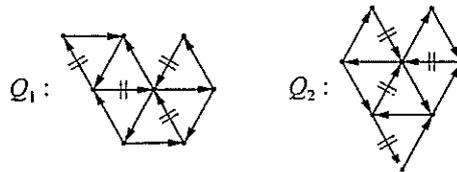
Dada Γ_5 , si eliminamos las flechas señaladas, se obtiene el álgebra:



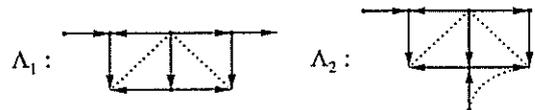
Como Λ_5 es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, Λ_5 es de tipo de representación infinito.

(3) Supongamos que $n_a = 5$ y que Q no es un diagrama de la lista. Tenemos los siguientes subcasos:

(3a) La intersección de tres ciclos cualesquiera de Q es un vértice. Si el número de vértices de Q es menor o igual que ocho, según la Observación 3.1.1, sólo debemos analizar los siguientes casos:



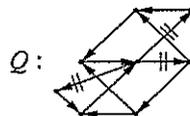
Para $i = 1, 2$, sea Γ_i la extensión trivial dada por Q_i con las relaciones correspondientes. Eliminando en Q_i las flechas indicadas se obtienen, respectivamente, las álgebras:



Λ_1 es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$ y $\Lambda_2/\Lambda_2 e_1 \Lambda_2$ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$. De aquí resulta que Γ_1 y Γ_2 son de tipo de representación infinito.

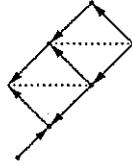
Por otra parte, si el número de vértices de Q es mayor o igual que nueve, un razonamiento totalmente análogo al de los casos precedentes, muestra que la extensión trivial $\Gamma = kQ/I$ es de tipo de representación infinito.

(3b) Supongamos que hay al menos tres ciclos orientados no disjuntos en Q , cuya intersección es un camino de longitud mayor o igual que uno. De un modo totalmente análogo al caso (2b), se deduce que si el número de vértices de Q es mayor o igual que nueve, entonces la extensión trivial correspondiente es de tipo de representación infinito. Por la Observación 3.1.1 resulta que con a lo sumo ocho vértices, tenemos que estudiar únicamente el siguiente caso:



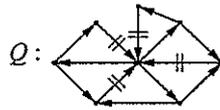
La extensión trivial Γ definida por Q , con las relaciones correspondientes, es de tipo de representación infinito. Efectivamente, $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, donde Λ se obtiene eliminando

las flechas indicadas en Q y está dada por el diagrama con relaciones siguiente:

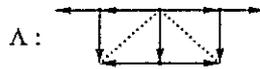


Como Λ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, resulta que Γ es de tipo de representación infinito.

- (4) Sea Γ una extensión trivial minimal con $\text{r}P/\text{soc}P$ indescomponible. Supongamos en primer lugar que $n_a = 6$. Entonces Γ se obtiene agregando apropiadamente un vértice a extensiones triviales minimales con $n_a = 5$. De acuerdo a la Observación 3.1.1, el primer caso a estudiar es la extensión trivial dada por el diagrama:



con las relaciones correspondientes. Eliminando las flechas indicadas, resulta el álgebra:



Como Λ es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, se tiene que Λ es de tipo de representación infinito y en consecuencia, Γ también lo es. De aquí y de la Observación 3.1.1 resulta que todas las extensiones triviales minimales con $\text{r}P/\text{soc}P$ indescomponible y $n_a = 6$ son de tipo infinito.

Si $n_a \geq 7$, Γ se obtiene agregando vértices a extensiones triviales minimales que verifican $n_a = 6$. El análisis precedente y la Observación 3.1.1 implican que Γ es de tipo infinito, lo que completa la demostración del teorema. ■

3.2.4 De clase de Cartan \mathbb{A}_n

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del análisis efectuado en 3.2.1 y 3.2.2:

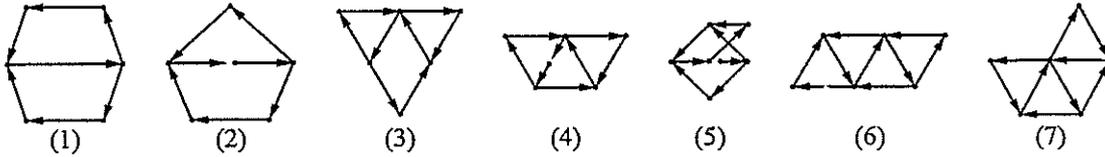
Corolario 3.2.4. *Sea Γ una extensión trivial tal que $\text{r}P/\text{soc}P$ es indescomponible para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Entonces, Γ es de tipo de representación finito, de clase de Cartan \mathbb{A}_n si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ tiene un único ciclo.*

3.2.5 De clase de Cartan \mathbb{E}_6

Con la ayuda del Teorema 3.2.1 y del análisis previo al mismo, es posible describir las extensiones triviales de tipo de representación finito, de clase de Cartan \mathbb{E}_6 , con $\text{r}P/\text{soc}P$ indes-

componible, cualquiera sea P proyectivo indescomponible.

Corolario 3.2.5. *Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Entonces Γ es de tipo de representación finito, de clase de Cartan \mathbb{E}_6 si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*

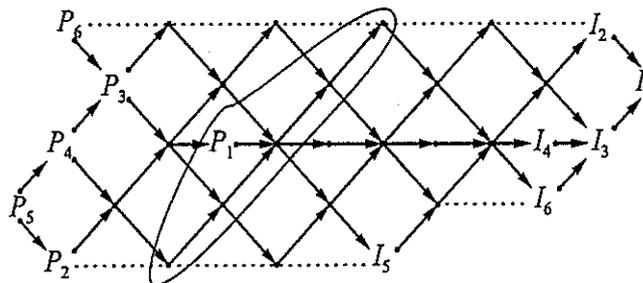


Demostración: Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo P . Ya vimos que si el diagrama de Γ es (1), (2), (5), (6) o (7), entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 . Sólo resta analizar los casos (3) y (4), cosa que haremos de manera análoga a la empleada en el Teorema 3.2.1.

Sean Γ y Λ las álgebras dadas, respectivamente, por:

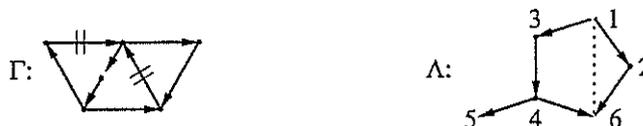


Es claro que eliminando de Γ las flechas indicadas resulta el álgebra Λ , que es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , pues como se muestra a continuación, el gráfico de Auslander – Reiten de Λ contiene una sección completa de tipo \mathbb{E}_6 :



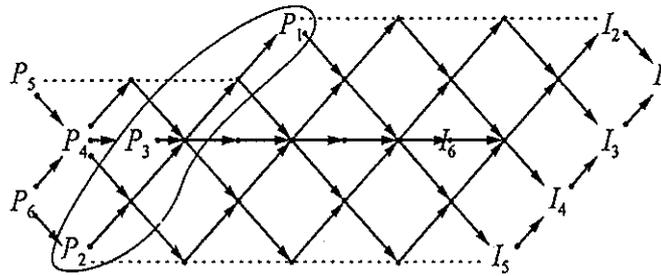
En consecuencia, Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 .

Por último, sean Γ y Λ las álgebras dadas, respectivamente, por:



Ahora bien, Λ se obtiene eliminando de Γ las flechas indicadas, y es inclinada de tipo Dynkin

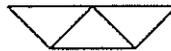
\mathbb{E}_6 , como se observa en su gráfico de Auslander – Reiten:



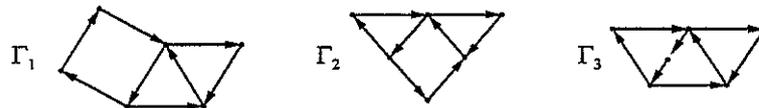
luego Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 .

Recíprocamente, supongamos que Γ es una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 , con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo P . Resulta de lo estudiado en 3.2.1 y 3.2.2 que $n_a \geq 2$ y que si $n_a = 2$, se obtienen las álgebras (1) y (2) de la lista.

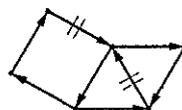
Sea pues $n_a \geq 3$. Agrandando los ciclos de la extensión trivial minimal de la forma:



es fácil ver que resultan las siguientes álgebras:



Vemos que Γ_2 y Γ_3 corresponden a los casos (3) y (4) y afirmamos que Γ_1 no es de clase de Cartan \mathbb{E}_6 . En efecto, si eliminamos del diagrama de Γ_1 las flechas indicadas:



se tiene el álgebra Λ_1 :



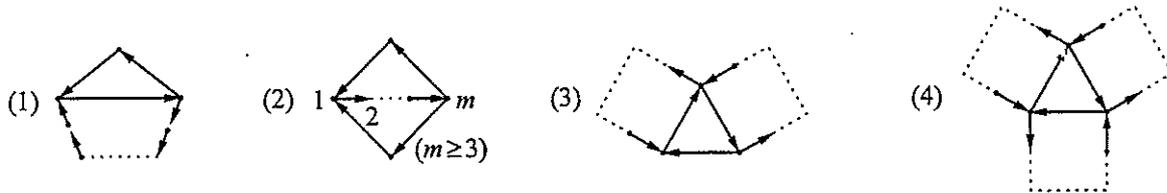
pero Λ_1 es un álgebra inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_6 , pues es cociente de un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_6$ de la lista [HV] por el ideal generado por una fuente y contiene una subcategoría convexa inclinada de tipo \mathbb{D}_5 .

Si el diagrama de Γ tiene más ciclos, del Teorema 3.2.1 se sigue que Γ es (5), (6) o (7), lo que concluye la demostración. ■

3.2.6 De clase de Cartan \mathbb{D}_n

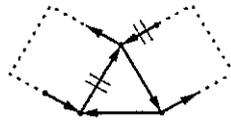
Vamos a determinar ahora las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n , con $rP/\text{soc } P$ indescomponible, cualquiera sea P proyectivo indescomponible.

Corolario 3.2.6. *Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*

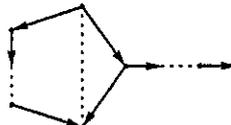


Demostración: Supongamos que Γ es una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo P . De lo estudiado cuando $n_a = 2$, resulta que los diagramas (1) y (2) corresponden a extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n .

Sea Γ dada por:

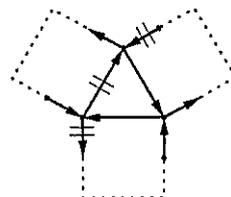


Eliminando las flechas indicadas se obtiene el álgebra Λ :

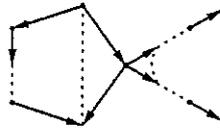


Ahora bien, Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n , como puede verificarse construyendo el gráfico de Auslander – Reiten de Λ . En consecuencia, Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n .

Por último, sea Γ :



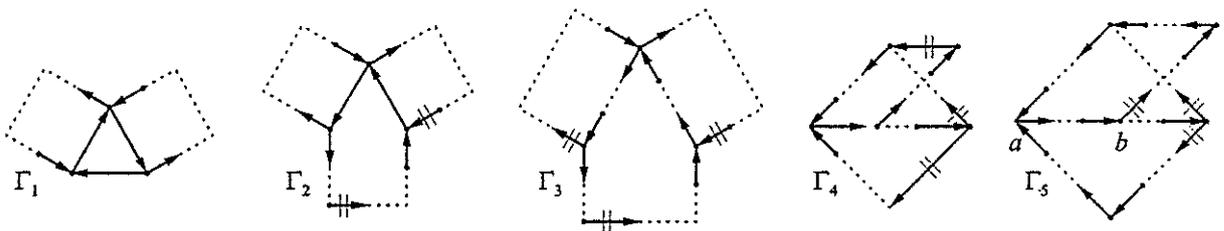
en este caso, eliminando las flechas indicadas tenemos el álgebra Λ :



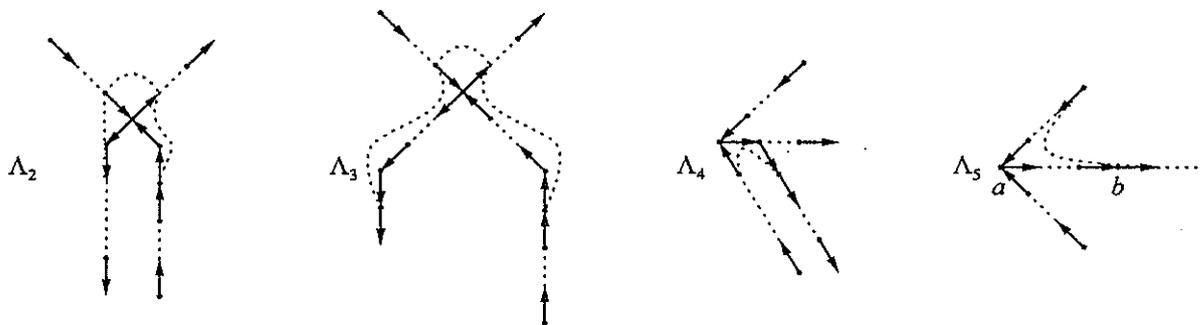
inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n , como puede verificarse construyendo el gráfico de Auslander - Reiten de Λ .

Recíprocamente, supongamos que Γ es una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n , con $rP/\text{soc } P$ indecomponible cualquiera sea P . Se sigue del análisis efectuado en 3.2.1 y 3.2.2, que $n_a \geq 2$ y que si $n_a = 2$, se obtienen las álgebras (1) y (2). Si en cambio $n_a \geq 3$, podemos considerar los siguientes sub-casos:

- i) Si hay exactamente tres ciclos, resulta del Teorema 3.2.1 que agrandando las extensiones minimales que satisfacen todas las condiciones impuestas, se obtendrá una de las siguientes álgebras:



La eliminación de las flechas indicadas del diagrama de Γ_i , $i = 2, 3, 4, 5$, produce las álgebras:



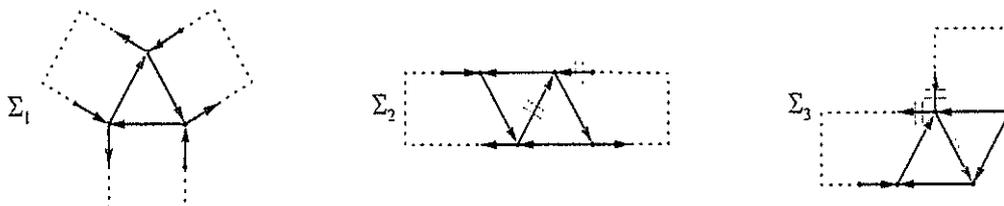
respectivamente. Observemos que



son subcategorías convexas de Λ_i , $i = 2, 3, 4, 5$, respectivamente. Más aún, cada una de ellas es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , ya que sus extensiones triviales (casos (3), (4), (5) y (2) del Corolario 3.2.5, resp.) son de tipo de representación finito de clase de

Cartan \mathbb{E}_6 . En consecuencia ninguna de las álgebras Λ_i , $i = 2, 3, 4, 5$, es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n y por lo tanto, las álgebras Γ_i correspondientes no pueden ser de clase de Cartan \mathbb{D}_n . Esto muestra que el único caso posible es Γ_1 .

ii) Si hay exactamente cuatro ciclos en el diagrama de Γ , los casos a estudiar son:



En efecto, cualquier otro agrandamiento de una extensión trivial minimal con cuatro ciclos, contiene un subdiagrama de la forma Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 o Γ_5 dadas en (i), que no son de clase \mathbb{D}_n . De nuevo, las álgebras que resultan al eliminar en Σ_2 y en Σ_3 las flechas indicadas contienen, respectivamente, las siguientes subcategorías convexas:



ambas son inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , pues sus extensiones triviales son isomorfas a las álgebras (6) y (7) del Corolario 3.2.5, respectivamente. Esto muestra que tanto Σ_2 como Σ_3 no pueden ser de clase \mathbb{D}_n . Por consiguiente, la única posibilidad es Σ_1 , que como ya vimos, es de tipo de representación finito de clase \mathbb{D}_n .

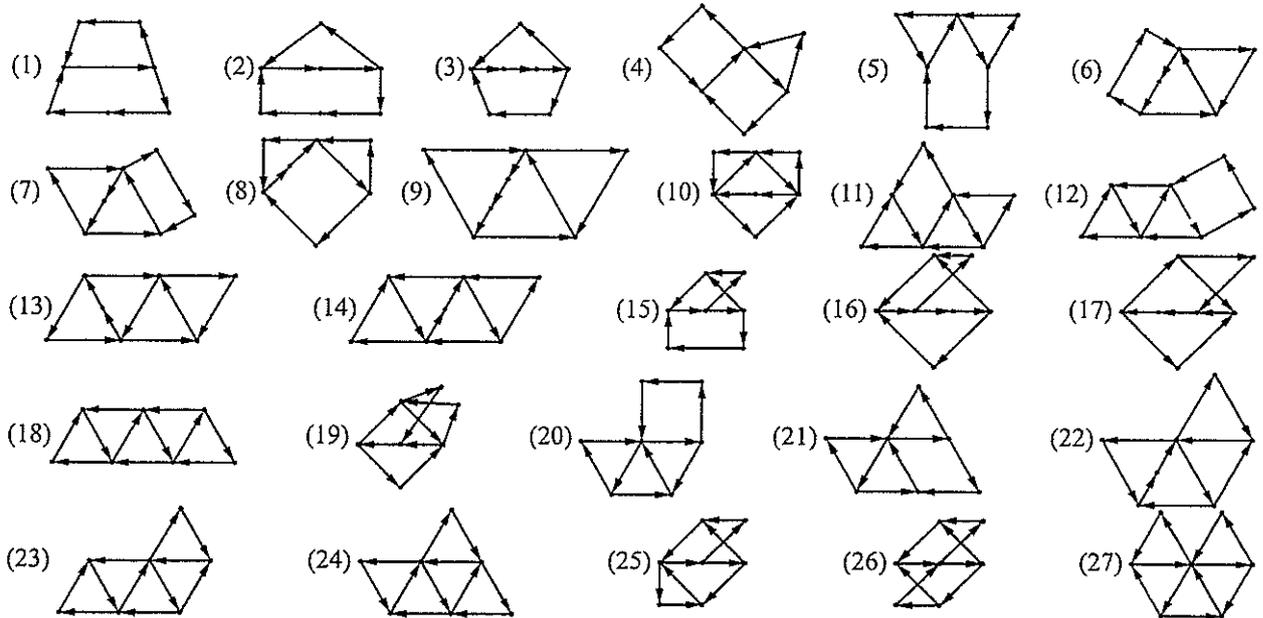
iii) Finalmente, observemos que cualquier agrandamiento de una extensión trivial minimal con cinco o más ciclos, contiene como subdiagrama a Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 , Σ_2 o bien Σ_3 . De aquí resulta que no hay más extensiones triviales de tipo de representación finito de clase \mathbb{D}_n que cumplan las condiciones del enunciado y esto completa la demostración. \square

3.2.7 De clase de Cartan \mathbb{E}_7

A continuación nos ocuparemos de la clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 , con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo módulo proyectivo indescomponible P . Hemos ya obtenido las que satisfacen la condición $n_a = 2$ (V. 3.2.2) y las que son minimales en el Teorema 3.2.1. Resta entonces, para completar la clasificación, determinar cuáles de todos los agrandamientos posibles de las extensiones triviales minimales de clase \mathbb{D}_n o \mathbb{E}_6 , son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 .

Corolario 3.2.7. *Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo P . Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 si, y sólo si, el diagrama*

ordinario de Γ es uno de los siguientes:



Demostración: Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo P . Cuando estudiamos el caso $n_a = 2$ vimos que las extensiones triviales (1), (2) y (3) son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 . Por el Teorema 3.2.1, sabemos también que (18), (19), (23), (24), (25), (26) y (27) son extensiones triviales minimales de clase de Cartan \mathbb{E}_7 . En cada uno de los casos restantes, indicaremos las flechas que se eliminan de cada ciclo para obtener un álgebra Λ inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 , tal que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$. De esta manera, por el Teorema [HW], concluimos que Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 .

Para la extensión trivial (4):



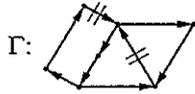
$\Lambda \simeq \Sigma/\Sigma e \Sigma$, donde Σ es un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$ (lista [HV], clase 5) y el idempotente e está asociado a una fuente en Q_Σ . De aquí resulta que Λ es inclinada de tipo Dynkin Q . Luego $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q . Ahora $Q = \mathbb{E}_7$, ya que $Q \neq \mathbb{E}_7$ implica $Q = \mathbb{A}_7$ o bien $Q = \mathbb{D}_7$, lo cual es imposible por los corolarios 3.2.4 y 3.2.6, respectivamente.

Para la extensión trivial (5):



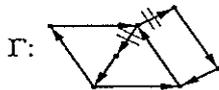
Se tiene que $\Lambda \simeq \Sigma/\Sigma e \Sigma$, donde Σ es un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$ (lista [HV], clase 14) y el idempotente e está asociado a una fuente en Q_Σ . Luego, como en el caso anterior, resulta que Λ es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_7 .

Para la extensión trivial (6):



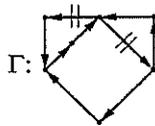
Σ : [HV], clase 5

Para la extensión trivial (7):



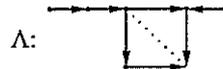
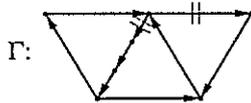
Σ : [HV], clase 2

Para la extensión trivial (8):



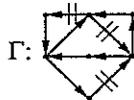
Σ : [HV], clase 8

Para la extensión trivial (9):



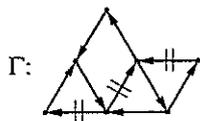
Σ : [HV], clase 2

Para la extensión trivial (10):



Σ : [HV], clase 5

Para la extensión trivial (11):



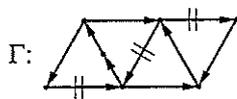
Σ : [HV], clase 7

Para la extensión trivial (12):



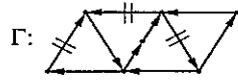
Σ : [HV], clase 1

Para la extensión trivial (13):



Σ : [HV], clase 5

Para la extensión trivial (14):



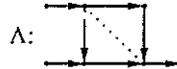
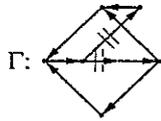
Σ : [HV], clase 9

Para la extensión trivial (15):



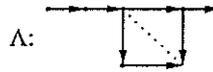
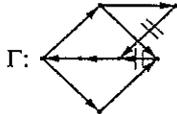
Σ : [HV], clase 2

Para la extensión trivial (16):



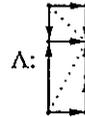
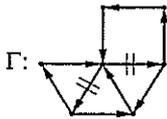
Σ : [HV], clase 3

Para la extensión trivial (17):



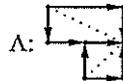
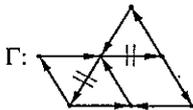
Σ : V. [HV], clase 2

Para la extensión trivial (20):



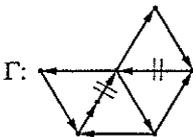
Σ : [HV], clase 18

Para la extensión trivial (21):



Σ : [HV], clase 17

Para la extensión trivial (22):



Σ : [HV], clase 13

Recíprocamente, supongamos que Γ es una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 , con $rP/\text{soc } P$ indecomponible para todo P . De los resultados obtenidos en 3.2.1 y 3.2.2, se deduce que $n_a \geq 2$ y que si $n_a = 2$, entonces Γ es una de las álgebras (1), (2) o (3) de la lista.

Por otra parte, por el Teorema 3.2.1, sabemos que si Γ es minimal y $n_a \geq 3$, entonces el diagrama de Γ es (18), (19), (23), (24), (25), (26) o (27).

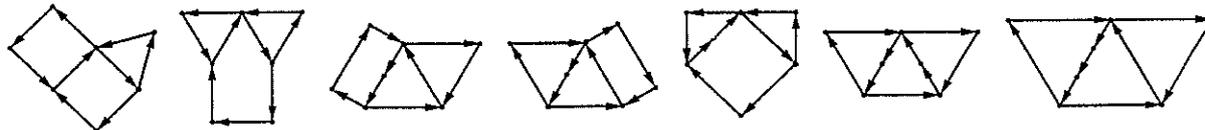
Para completar la demostración, según se indicó, bastará considerar todos los agrandamien-

tos (salvo dualidad) de las extensiones triviales minimales de clase \mathbb{D}_n o \mathbb{E}_6 que constan de siete vértices y determinar cuáles de ellos son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 .

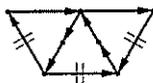
Comenzamos con los agrandamientos de la extensión trivial minimal de la forma



excluyendo aquéllos en los que el ciclo central es de longitud 3, que según el Corolario 3.2.6 son de clase \mathbb{D}_n . Se tienen entonces las siguientes posibilidades para Γ :



Se descarta el caso



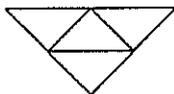
pues se trata de un álgebra de tipo de representación infinito. En efecto, eliminando las flechas indicadas se obtiene el álgebra Λ :



que es inclinada de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$.

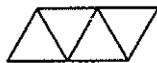
Las restantes posibilidades corresponden a los casos (4), (5), (6), (7), (8) o (9) de la lista.

Consideremos ahora los agrandamientos de la extensión trivial minimal de la forma:

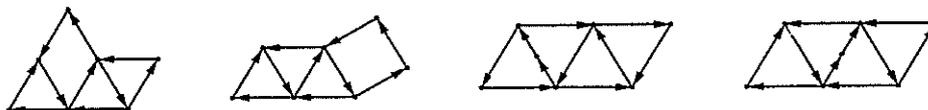


Del Corolario 3.2.6 se sigue que el diagrama (10) de la lista es el único posible para Γ .

A continuación, pasamos a describir los agrandamientos de la extensión trivial minimal de la forma:



que constan de siete vértices:



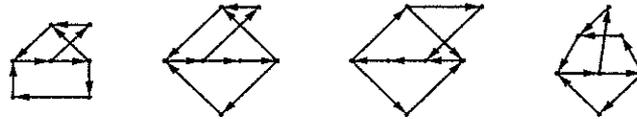
Como se mostró previamente, todas ellas son extensiones triviales minimales de tipo de repre-

sentación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 .

Sea ahora la extensión trivial minimal con la siguiente forma:



Agrandando los ciclos de la misma, es fácil ver que resultan las siguientes álgebras:



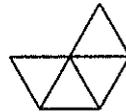
El último diagrama corresponde a un álgebra de tipo de representación infinito, pues la sub-categoría



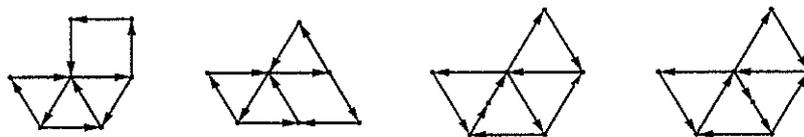
es convexa de tipo euclideano $\tilde{\mathbb{D}}_5$.

Las álgebras restantes son extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 , como se ha visto.

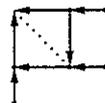
Quedan por estudiar los agrandamientos de la extensión trivial minimal cuyo diagrama tiene la siguiente forma:



Tenemos las siguientes posibilidades para Γ :



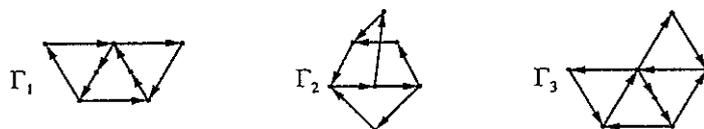
Nuevamente, excluimos la última opción, por ser de tipo de representación infinito. Más precisamente, se trata de la extensión trivial del álgebra



que es mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$. La demostración del corolario está completa. \blacksquare

Observación 3.2.8. De acuerdo a lo demostrado previamente, las siguientes álgebras son exten-

siones triviales de tipo de representación infinito:

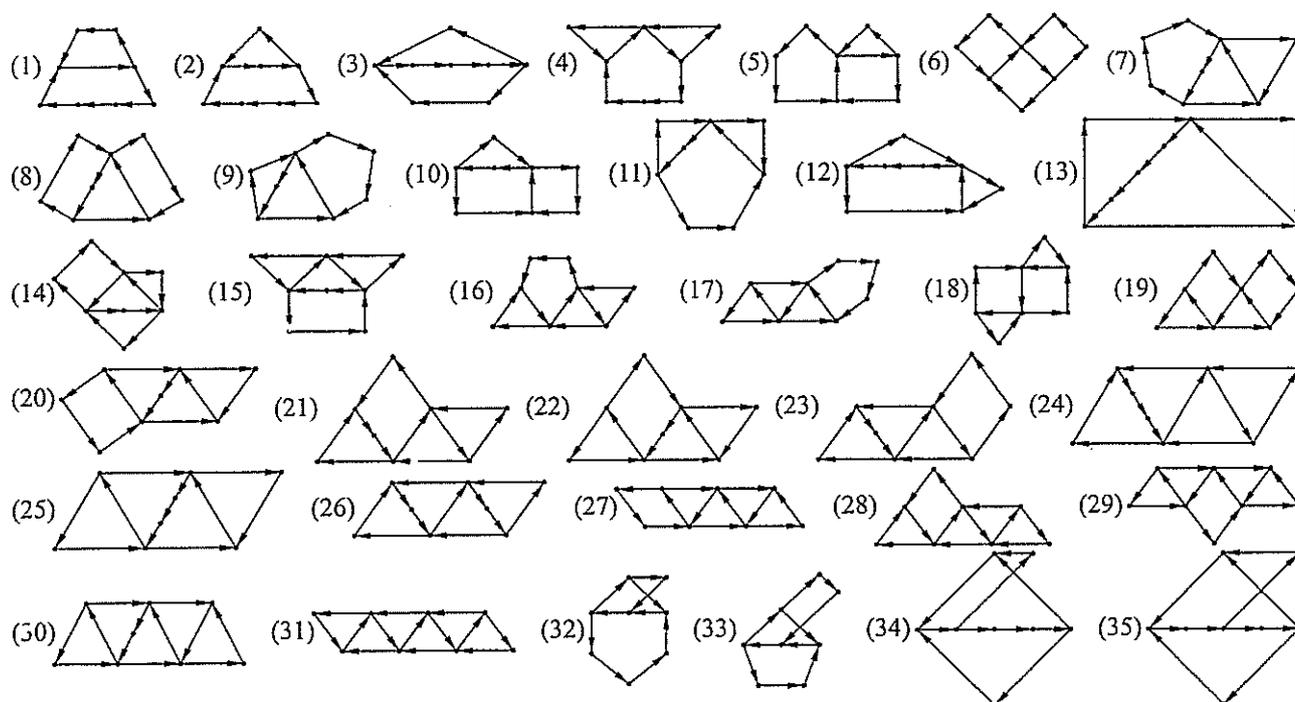


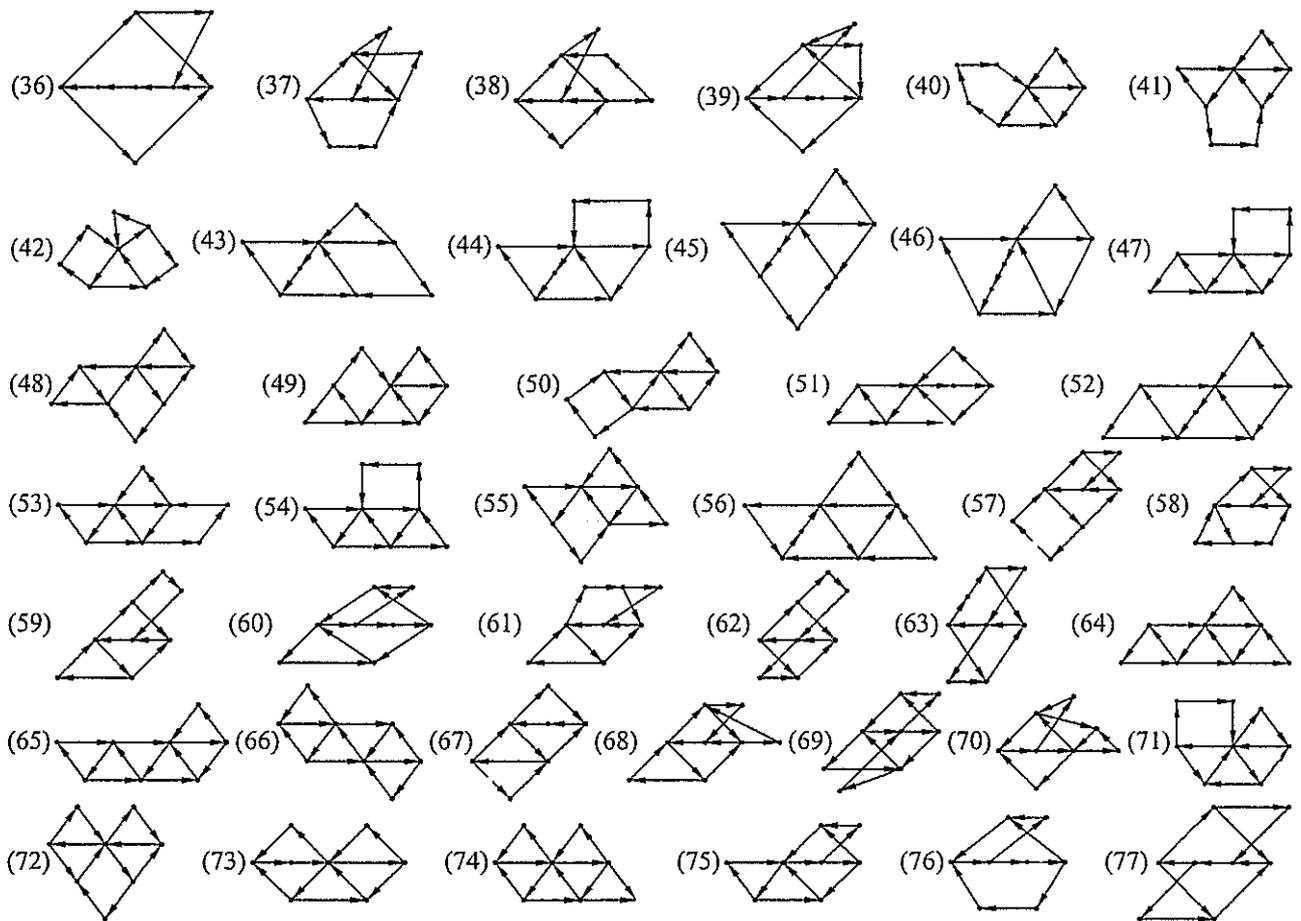
Por esta razón, no es necesario estudiar aquellas álgebras Γ , tales que para algún Γ -módulo proyectivo P , $\text{End}_{\Gamma}(P) = \Gamma_i$.

3.2.8 De clase de Cartan \mathbb{E}_8

Nos dedicaremos en esta sección a clasificar las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 , con $\text{r}P/\text{soc } P$ indescomponible para todo módulo proyectivo indescomponible P . Ya hemos considerado las que satisfacen la condición $n_a = 2$ en 3.2.2 y las que son minimales en el Teorema 3.2.1. Basta entonces, para completar la clasificación, considerar todos los agrandamientos de las extensiones triviales minimales de clase \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 ó \mathbb{E}_7 que tienen ocho vértices y decidir cuáles de ellos son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 .

Corolario 3.2.9. *Sea Γ una extensión trivial tal que $\text{r}P/\text{soc } P$ es indescomponible para todo P . Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*

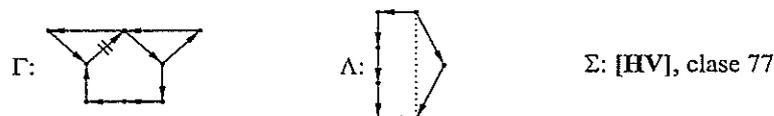




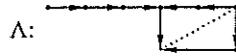
Demostración: Sea Γ una extensión trivial tal que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Vimos al estudiar el caso $n_a = 2$ que las extensiones triviales (1), (2) y (3) son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 . Por el **Teorema 3.2.1** sabemos también que (31), (64), (65), (66), (67), (68), (69), (70), (74) y (75) son extensiones triviales minimales de clase de Cartan \mathbb{E}_8 . En cada uno de los casos restantes indicaremos las flechas que se eliminan de cada ciclo de Q_Γ para obtener un álgebra Λ inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 , tal que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$. De aquí, aplicando el **Teorema [HW]** resulta que Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 .

Para verificar que cada álgebra Λ de las mencionadas es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 usamos la misma técnica que la empleada en el Corolario 3.2.7. Más precisamente, mostramos que $\Lambda \simeq \Sigma/\Sigma e \Sigma$, donde Σ es un álgebra de la lista [HV] de clase $\tilde{\mathbb{E}}_8$ y el idempotente e está asociado a una fuente en Q_Σ . En consecuencia, Λ es inclinada de tipo Dynkin Q , de donde $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q . Ahora bien, por el Corolario 3.2.4 y el Corolario 3.2.6, se tiene que $Q = \mathbb{E}_8$.

Para la extensión trivial (4):

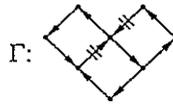


Para la extensión trivial (5):



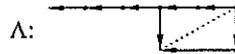
Σ : [HV], clase 8

Para la extensión trivial (6):



Σ : [HV], clase 35

Para la extensión trivial (7):



Σ : [HV], clase 8

Para la extensión trivial (8):



Σ : [HV], clase 15

Para la extensión trivial (9):



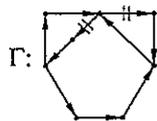
Σ : [HV], clase 2

Para la extensión trivial (10):



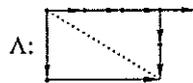
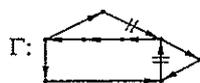
Σ : [HV], clase 18

Para la extensión trivial (11):



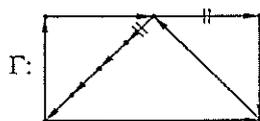
Σ : [HV], clase 42

Para la extensión trivial (12):



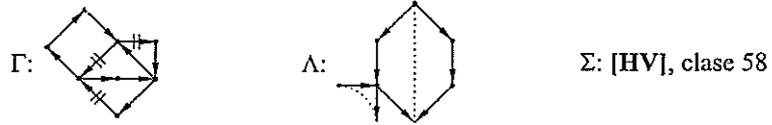
Σ : [HV], clase 60

Para la extensión trivial (13):

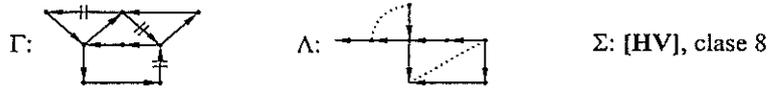


Σ : [HV], clase 3

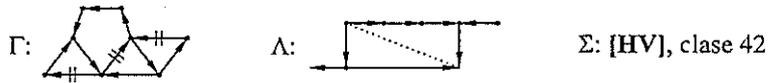
Para la extensión trivial (14):



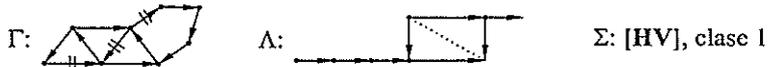
Para la extensión trivial (15):



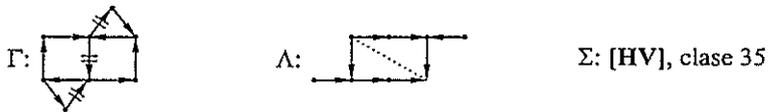
Para la extensión trivial (16):



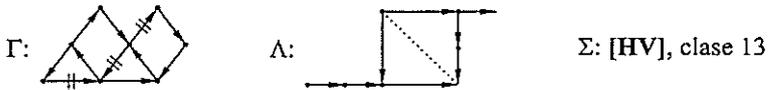
Para la extensión trivial (17):



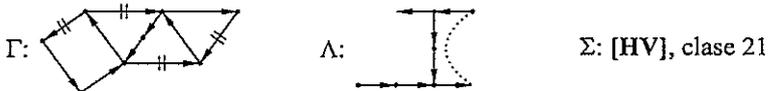
Para la extensión trivial (18):



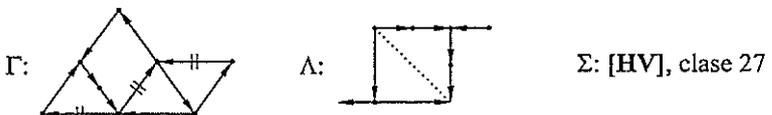
Para la extensión trivial (19):



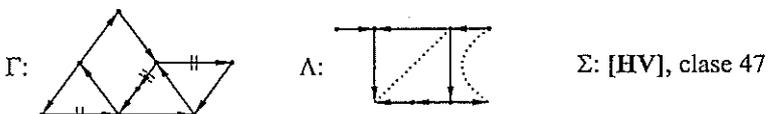
Para la extensión trivial (20):



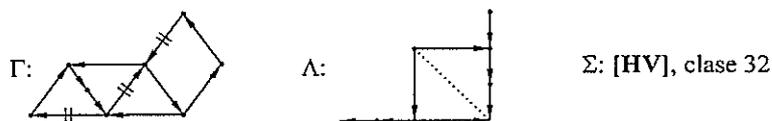
Para la extensión trivial (21):



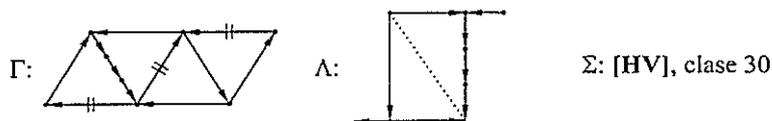
Para la extensión trivial (22):



Para la extensión trivial (23):



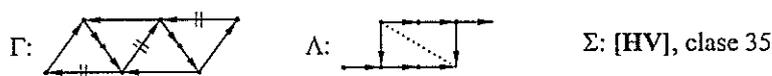
Para la extensión trivial (24):



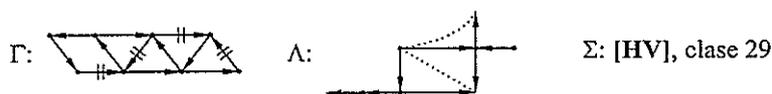
Para la extensión trivial (25):



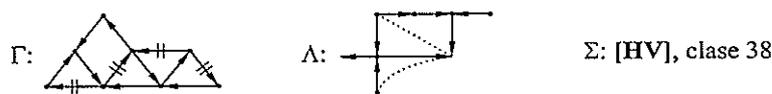
Para la extensión trivial (26):



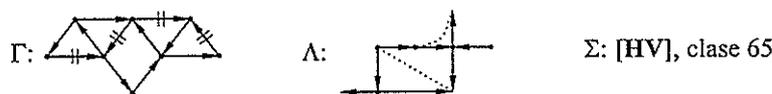
Para la extensión trivial (27):



Para la extensión trivial (28):



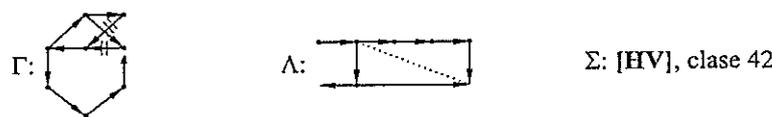
Para la extensión trivial (29):



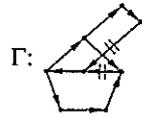
Para la extensión trivial (30):



Para la extensión trivial (32):

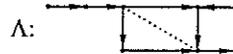
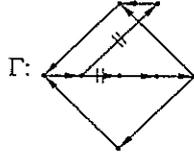


Para la extensión trivial (33):



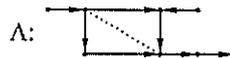
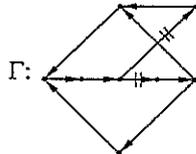
Σ : [HV], clase 15

Para la extensión trivial (34):



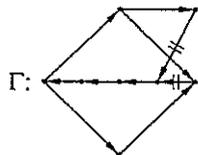
Σ : [HV], clase 5

Para la extensión trivial (35):



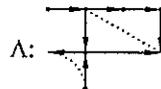
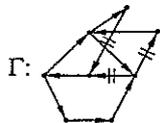
Σ : [HV], clase 5

Para la extensión trivial (36):



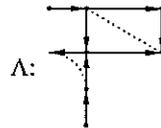
Σ : [HV], clase 4

Para la extensión trivial (37):



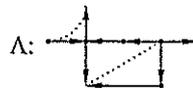
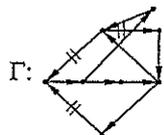
Σ : [HV], clase 15

Para la extensión trivial (38):



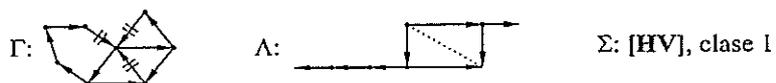
Σ : [HV], clase 2

Para la extensión trivial (39):

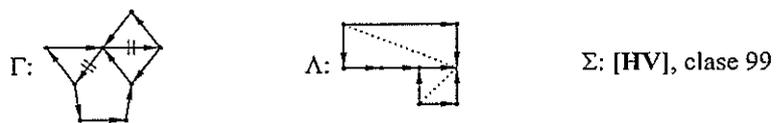


Σ : [HV], clase 18

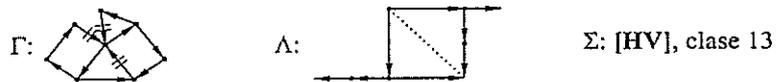
Para la extensión trivial (40):



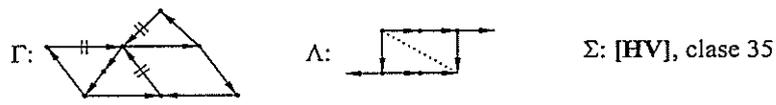
Para la extensión trivial (41):



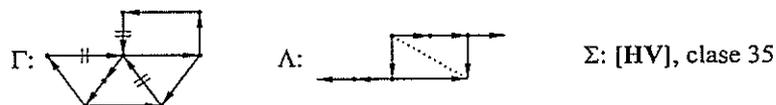
Para la extensión trivial (42):



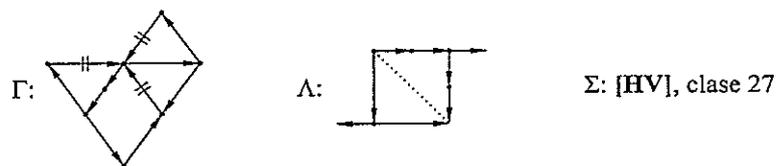
Para la extensión trivial (43):



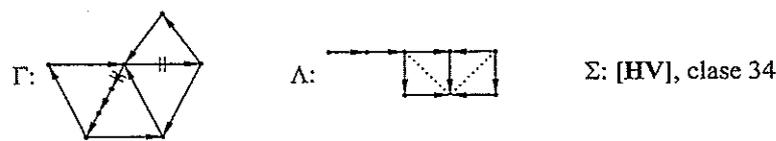
Para la extensión trivial (44):



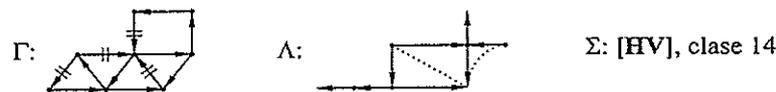
Para la extensión trivial (45):



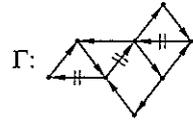
Para la extensión trivial (46):



Para la extensión trivial (47):

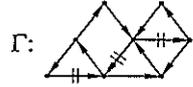


Para la extensión trivial (48):



Σ : [HV], clase 46

Para la extensión trivial (49):



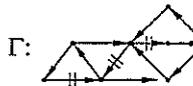
Σ : [HV], clase 53

Para la extensión trivial (50):



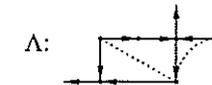
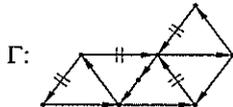
Σ : [HV], clase 25

Para la extensión trivial (51):



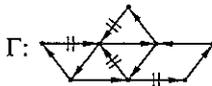
Σ : [HV], clase 33

Para la extensión trivial (52):



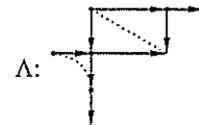
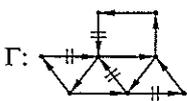
Σ : [HV], clase 34

Para la extensión trivial (53):



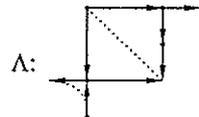
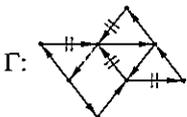
Σ : [HV], clase 1

Para la extensión trivial (54):



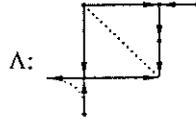
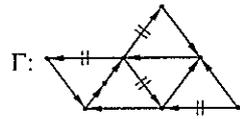
Σ : [HV], clase 1

Para la extensión trivial (55):



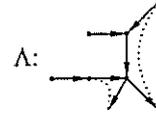
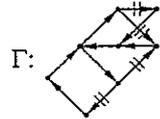
Σ : [HV], clase 13

Para la extensión trivial (56):



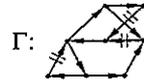
Σ : [HV], clase 13

Para la extensión trivial (57):



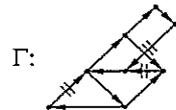
Σ : [HV], clase 6

Para la extensión trivial (58):



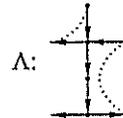
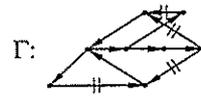
Σ : [HV], clase 47

Para la extensión trivial (59):



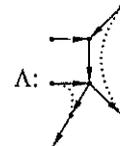
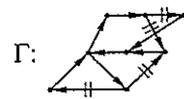
Σ : [HV], clase 26

Para la extensión trivial (60):



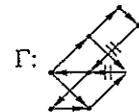
Σ : [HV], clase 21

Para la extensión trivial (61):



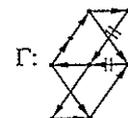
Σ : [HV], clase 6

Para la extensión trivial (62):



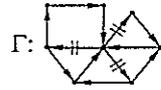
Σ : [HV], clase 36

Para la extensión trivial (63):



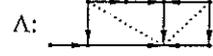
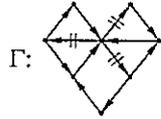
Σ : [HV], clase 74

Para la extensión trivial (71):



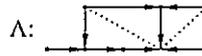
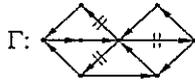
Σ : [HV], clase 76

Para la extensión trivial (72):



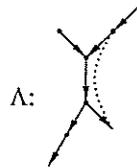
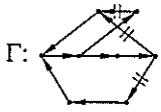
Σ : [HV], clase 75

Para la extensión trivial (73):



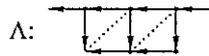
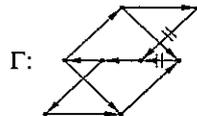
Σ : [HV], clase 73

Para la extensión trivial (76):



Σ : [HV], clase 7

Para la extensión trivial (77):



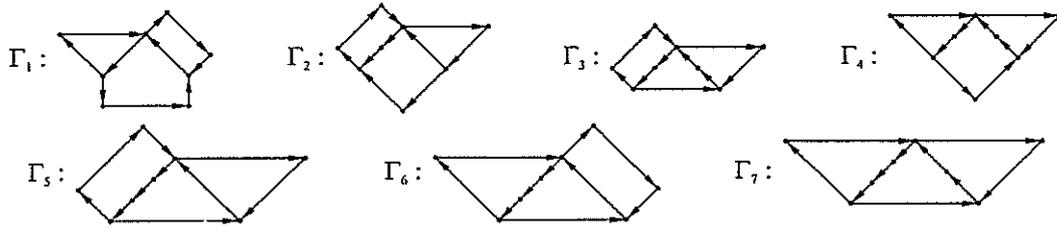
Σ : [HV], clase 36

Vamos a probar que estas álgebras son las únicas extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 que verifican la condición $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo P . Para ello, basta ver que los restantes agrandamientos de las extensión trivial minimales de clase \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 o \mathbb{E}_7 que constan de ocho vértices, son de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_8 o bien, de tipo de representación infinito. Las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase \mathbb{D}_8 han sido estudiadas en 3.2.6, luego podemos omitir los casos correspondientes a dichas extensiones triviales y mostrar que los restantes determinan siempre álgebras de tipo infinito.

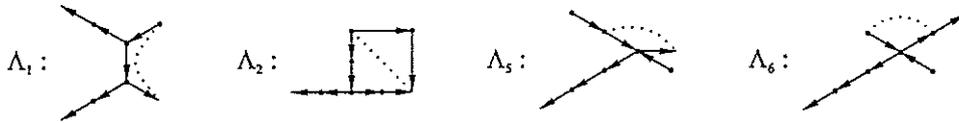
(a) Dada la extensión trivial de la forma:



debemos probar que las siguientes álgebras son de tipo infinito:

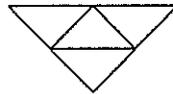


De la **Observación 3.2.8** resulta que Γ_3 , Γ_4 y Γ_7 son de tipo de representación infinito. Mostramos a continuación que Γ_1 , Γ_2 , Γ_5 y Γ_6 son extensiones triviales de

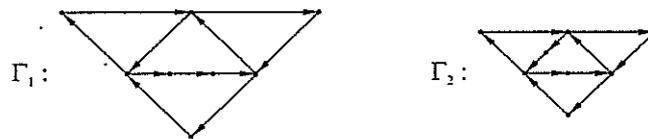


respectivamente. Λ_1 , Λ_2 , Λ_5 y Λ_6 son álgebras inclinadas de tipo \tilde{E}_7 , incluidas en la lista [HV], y en consecuencia Γ_1 , Γ_2 , Γ_5 y Γ_6 son de tipo infinito.

(b) Consideremos la extensión trivial de la forma:



Veamos que las álgebras



son de tipo de representación infinito. En efecto, por la **Observación 3.2.8** sabemos que Γ_2 es de tipo de representación infinito, en tanto que Γ_1 es la extensión trivial del álgebra Λ dada por el siguiente diagrama con relaciones:

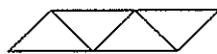


Ahora bien, Λ contiene una subcategoría convexa de la lista [HV], a saber:

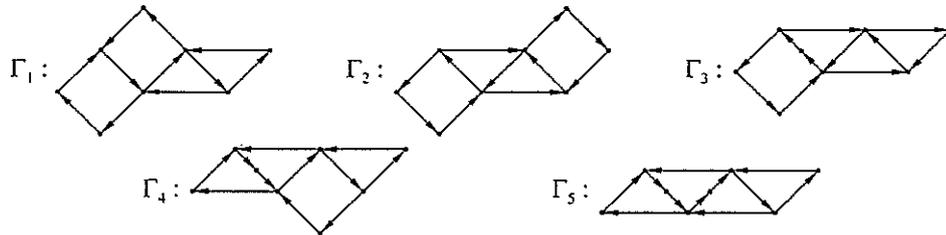


luego, Λ es de tipo de representación infinito, y por lo tanto Γ_1 también lo es.

(c) En el caso de la extensión trivial de la forma:



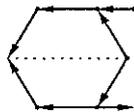
probaremos que son de tipo infinito los siguientes agrandamientos:



Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 corresponden, respectivamente, a extensiones triviales de las siguientes álgebras de la lista [HV]:



Γ_4 es de tipo infinito, pues se trata de la extensión trivial del álgebra

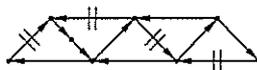


y la misma contiene una subcategoría convexa llena de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_6$. Finalmente, de la Observación 3.2.8 resulta que Γ_5 es de tipo de representación infinito.

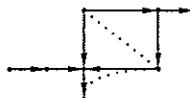
(d) Dada la extensión trivial minimal de la forma:



verificaremos que es de tipo de representación infinito el álgebra Γ :



para ello, eliminaremos las flechas indicadas con “//”, se obtiene así el álgebra Λ dada por el siguiente diagrama con relaciones:

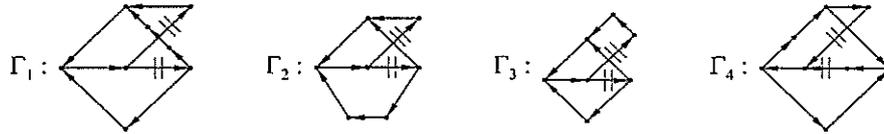


De acuerdo con la lista [HV], Λ es de tipo de representación infinito , de donde $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ es de tipo infinito.

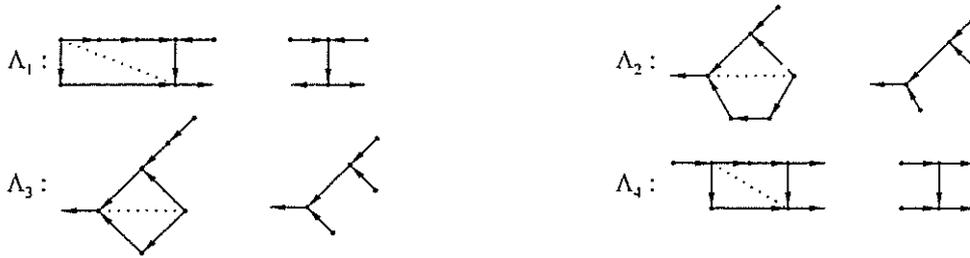
(e) Ahora consideremos la extensión trivial minimal de la forma:



Veremos que son de tipo de representación infinito las extensiones triviales que siguen:



Mostramos a continuación las álgebras $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ y Λ_4 que se obtienen eliminando las flechas indicadas en cada caso, y para cada una de ellas un subdiagrama convexo lleno de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_6$



(f) Cuando la extensión trivial minimal es de la forma:



mostraremos que son de tipo de representación infinito las extensiones triviales:



Eliminando de Γ_1 las flechas indicadas, se obtiene el álgebra:

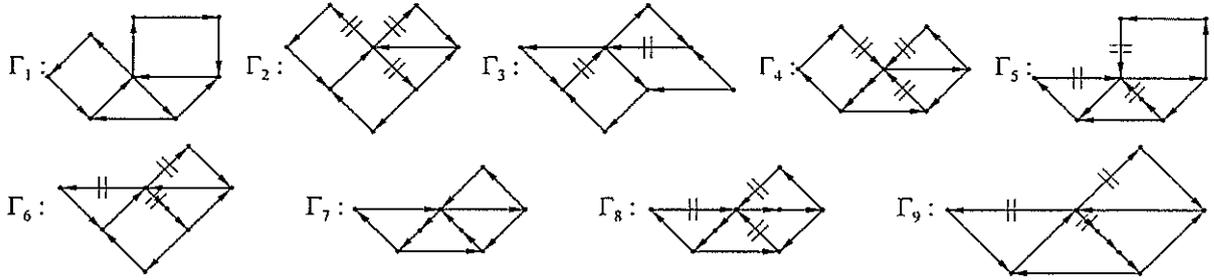


que es mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, y por lo tanto, de tipo de representación infinito, luego $\Gamma_1 \simeq T(\Lambda_1)$ es de tipo infinito. De la **Observación 3.2.8** resulta que Γ_2 es de tipo de representación infinito.

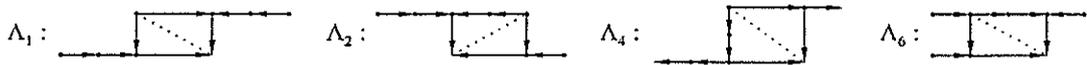
(g) Sea ahora la extensión trivial minimal de la forma:



Debemos probar que las siguientes álgebras son de tipo de representación infinito:



$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$ y Γ_6 corresponden a extensiones triviales de álgebras inclinadas de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$ en la lista [HV], que llamaremos $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4$ y Λ_6 , respectivamente. Estas álgebras son de tipo de representación infinito y se listan a continuación:



Γ_3 y Γ_8 son de tipo de representación infinito, ya que corresponden a extensiones triviales de álgebras Λ_3 y Λ_8 que contienen un subdiagrama convexo lleno de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_6$ y $\tilde{\mathbb{D}}_7$, respectivamente, en efecto:

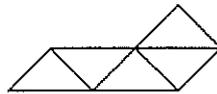


Analizamos Γ_5 y Γ_9 . Al eliminar las flechas señaladas se obtienen, respectivamente, las álgebras:

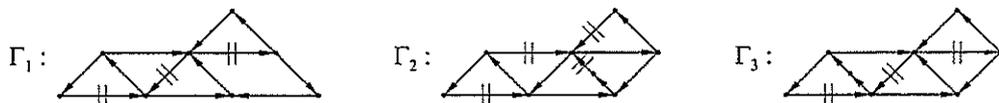


Como $\Lambda_5/\Lambda_5 e_a \Lambda_5$ y $\Lambda_9/\Lambda_9 e_b \Lambda_9$ son álgebras mansas ocultas de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$, entonces Λ_5 y Λ_9 son de tipo de representación infinito, luego Γ_5 y Γ_9 también lo son. Por último, de la Observación 3.2.8 resulta que Γ_7 es de tipo de representación infinito.

(h) Consideremos la extensión trivial minimal de la forma:



Veamos que los siguientes agrandamientos son de tipo de representación infinito:

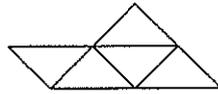


A continuación, mostramos las álgebras Λ_1, Λ_2 y Λ_3 que se obtienen eliminando las flechas indicadas en cada caso, y para cada una de ellas un subdiagrama convexo lleno de la lista [HV]. De aquí se sigue que las extensiones triviales Γ_1, Γ_2 y Γ_3 son de tipo de

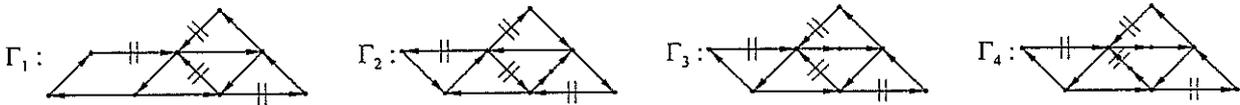
representación infinito:



(i) Dada la extensión trivial minimal de la forma:



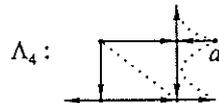
Probaremos que son de tipo de representación infinito los agrandamientos que siguen:



Ahora bien, Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 son de tipo infinito, porque corresponden a extensiones triviales de álgebras mansas Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 , ocultas de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$:

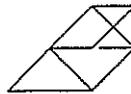


En tanto que Γ_4 corresponde a la extensión trivial del álgebra Λ_4 dada por el siguiente diagrama con relaciones:

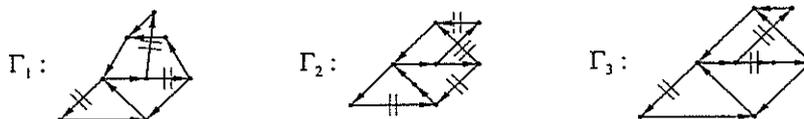


Como $\Lambda_4/\Lambda_4 e_a \Lambda_4$ es mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$, resulta que Λ_4 es de tipo infinito, de donde Γ_4 también lo es.

(j) Para la extensión trivial minimal de la forma:

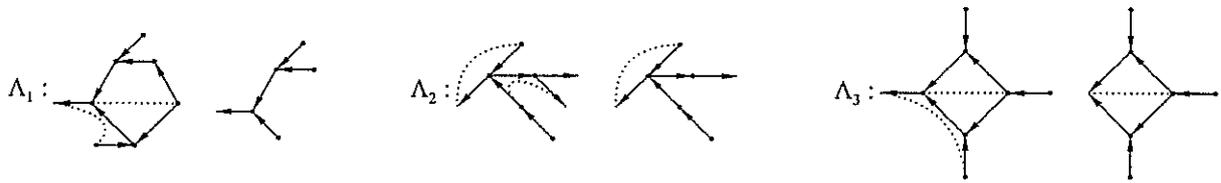


tenemos que demostrar que las siguientes extensiones triviales son de tipo de representación infinito:



Para ello, indicamos las álgebras Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 que se obtienen eliminando las flechas señaladas, y para cada una de ellas un subdiagrama convexo lleno de la lista [HV], lo

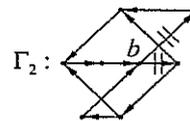
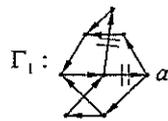
que nos permite deducir que Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 son de tipo infinito:



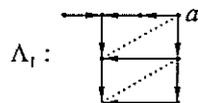
(k) Para la extensión trivial de la forma:



mostramos que son de tipo de representación infinito los siguientes agrandamientos:



Al eliminar las flechas señaladas, se obtienen las álgebras Γ_1 y Γ_2 , respectivamente, dadas por los siguientes diagramas con relaciones:

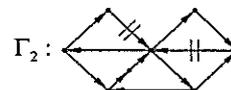


Tenemos que el cociente $\Lambda_1/\Lambda_1 e_a \Lambda_1$ es un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_6$, mientras que $\Lambda_2/\Lambda_2 e_b \Lambda_2$ es mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$. En consecuencia Λ_1 y Λ_2 , y por lo tanto Γ_1 y Γ_2 , son de tipo de representación infinito.

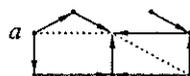
(l) Finalmente, dada la extensión trivial minimal de la forma:



vamos a ver que las siguientes álgebras son de tipo de representación infinito:

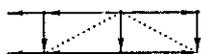


Γ_1 corresponde a la extensión trivial $T(\Lambda)$, donde Λ es:



el cociente $\Lambda/\Lambda e_a \Lambda$ es un álgebra de la lista [HV], se deduce así que $T(\Lambda)$ es de tipo de representación infinito. Resta verificar que Γ_2 es de tipo de representación infinito. Esto

es así porque el álgebra:



obtenida eliminando de Γ_2 las flechas indicadas, pertenece a la lista [HV].

La demostración del teorema está completa. \blacksquare

3.3 Extensiones triviales de tipo de representación finito tales que el máximo número de sumandos de $rP/\text{soc } P$ es dos

El objetivo en esta sección es clasificar las extensiones triviales de tipo de representación finito tales que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, cualquiera sea P proyectivo indescomponible.

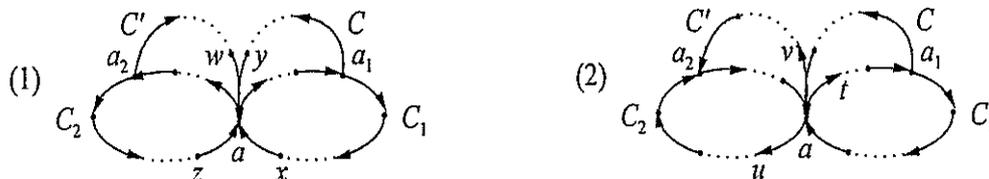
Es claro que si Γ es una extensión trivial con la propiedad mencionada, existe al menos un vértice a en Q_Γ que posee exactamente dos clases de congruencia de ciclos en \mathcal{C}_a . Más aún, la siguiente proposición muestra que si Γ es de tipo finito, entonces alguna de estas dos clases tiene un sólo elemento.

Proposición 3.3.1. *Sea Γ una extensión trivial de tipo finito. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_a$ son ciclos no congruentes, entonces la clase de congruencia de alguno de ellos es un conjunto unitario.*

Demostración: Supongamos por el absurdo que existen ciclos $C'_1, C'_2 \in \mathcal{C}_a$ tales que $C'_1 \mathfrak{R} C_1$, $C'_2 \mathfrak{R} C_2$, con $C'_1 \neq C_1$ y $C'_2 \neq C_2$.

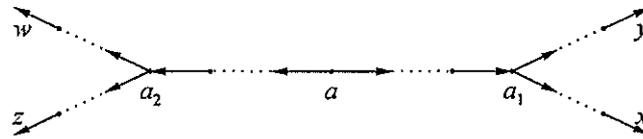
Elegimos en la clase de congruencia de C_1 un ciclo C tal que la intersección de C_1 con C sea maximal. De manera análoga, tomemos un ciclo C' en la clase de congruencia de C_2 .

Sea P la suma de todos los Γ -módulos proyectivos indescomponibles P_k , donde $k \in (\underline{C}_1 \cup \underline{C}_2 \cup \underline{C} \cup \underline{C'})_0$. Consideremos el álgebra $\Sigma = \text{End}_\Gamma(P)$, entonces Q_Σ es uno de los diagramas siguientes:



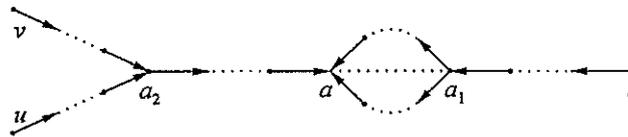
Sea Q_Σ el diagrama (1). Eliminando en los ciclos orientados de Q_Σ las flechas que llegan al vértice a , resulta que Σ es la extensión trivial del álgebra $\Lambda' = kQ'$, donde Q' es el siguiente

diagrama de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_n$:



De aquí, Σ es de tipo infinito, contradiciendo la hipótesis.

Supongamos ahora que Q_Σ es el diagrama (2). En este caso, eliminando las flechas con origen en a , se obtiene el álgebra Λ' dada por el digrama con relaciones:



Como Λ' contiene una subcategoría convexa llena de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, es de tipo de representación infinito y por lo tanto, Σ es de tipo infinito, lo cual es una contradicción. ■

Teniendo en cuenta la proposición anterior, es natural comenzar estudiando las extensiones triviales Γ de tipo de representación finito tales que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, y que satisfacen la condición:

- i) Para todo vértice a en Q_Γ , cada clase de congruencia de ciclos en C_a tiene un sólo elemento.

Sabemos además, por el Lema 3.1.12 que tales extensiones triviales verifican la siguiente condición:

- ii) Si C_1, C_2, \dots, C_l , con $l \geq 3$ son ciclos orientados en Q_Γ tales que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset, \dots, C_{l-1} \cap C_l \neq \emptyset$, entonces $C_l \cap C_1 = \emptyset$.

3.3.1 De clase de Cartan \mathbb{A}_n

El siguiente resultado muestra que las extensiones triviales tales que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos y que satisfacen las condiciones i) y ii) enunciadas, son precisamente las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n que poseen al menos dos ciclos orientados, salvo reordenamiento de flechas.

Teorema 3.3.2. *Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:*

- i) Para todo vértice a en Q_Γ , cada clase de congruencia de ciclos en C_a tiene un sólo elemento.

- ii) Si C_1, C_2, \dots, C_l son ciclos orientados en Q_Γ tales que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset, \dots, C_{l-1} \cap C_l \neq \emptyset$, entonces $C_l \cap C_1 = \emptyset$.

Demostración: Sea Γ de tipo de representación finito de clase de Cartan A_n tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos para todo Γ -módulo proyectivo indescomponible P . Resulta del Teorema [HW] y del Teorema 3.1.10 que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, donde Λ es un ramo truncado de longitud n . Esto implica que Γ satisface las condiciones i) y ii) del enunciado. En efecto:

- Cada camino maximal de α -flechas (β -flechas) determina un ciclo orientado.
- Los ciclos determinados por caminos maximales de α -flechas (β -flechas) son disjuntos dos a dos.
- Si un camino de α -flechas y un camino de β -flechas se cortan, lo hacen en un único punto. En ese caso, si los caminos son maximales, los ciclos determinados no tienen flechas en común.

Recíprocamente, sea Γ una extensión trivial que satisface las condiciones i) y ii). Mostraremos por inducción en el número m (salvo reordenamiento de flechas) de ciclos orientados de Γ que existe un álgebra Λ inclinada de tipo Dynkin A_n tal que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ como k -álgebras.

Es sencillo ver la validez de lo afirmado para $m = 2$. Sea $m > 2$ y supongamos que el resultado es válido para extensiones triviales con $m - 1$ ciclos orientados, que satisfacen i) y ii). Sea entonces Γ con m ciclos. Por ii) podemos elegir un ciclo C no disjunto con un único ciclo C' . De i) resulta que $C \cap C'$ es un vértice, digamos b .

Consideremos la extensión trivial Γ' dada por todos los ciclos de Γ , excepto C . Por la hipótesis inductiva, se tiene que $\Gamma' \simeq T(\Lambda')$ como k -álgebras, donde Λ' es inclinada de tipo Dynkin $A_{n'}$. Más precisamente, Λ' es un ramo truncado de longitud n' en un vértice, que podemos llamar a' . Además, $a' \neq b$, ya que b en $Q_{\Gamma'}$ pertenece solamente a C' .

Por otra parte, b pertenece a un camino de α -flechas (β -flechas) en Λ' , pues de lo contrario, b estaría en dos ciclos de Γ' . Si b pertenece a un camino de α -flechas (β -flechas) en $Q_{\Lambda'}$, se elimina del ciclo C la flecha que llega al (corresp. sale del) vértice b .

Se obtiene, en cualquier caso un álgebra Λ que es inclinada de tipo A_n , ya que al igual que Λ' , es un ramo truncado en a' que se diferencia de Λ' en las $\text{long}(C) - 1$ flechas agregadas en el vértice b . ■

Como consecuencia inmediata del Teorema 3.3.2 y del Corolario 3.2.4, tenemos la siguiente observación:

Observación 3.3.3. Sea Γ una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan A_n , x un vértice de Q_Γ y supongamos que x está en un único ciclo orientado (salvo reordenamiento de flechas). Entonces $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, donde Λ es un ramo truncado en x y x es un pozo en Λ .

Esta afirmación resulta de la demostración del Teorema 3.3.2, si en la misma el ciclo C se elige con la propiedad adicional de ser distinto del ciclo que contiene a x , si $m > 2$.

Damos a continuación una definición que nos resultará útil. Cabe destacar que la noción que introducimos se corresponde con el concepto de agregar un ramo truncado dado por Ringel y que mencionamos en la Definición 3.1.7.

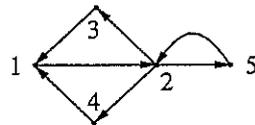
Definición 3.3.4. Dada $\Gamma = kQ/I$ una extensión trivial, a_1, \dots, a_l vértices distintos en Q_0 y n_1, \dots, n_l números naturales. Sea $\Gamma' = kQ'/I \cap kQ'$ una extensión trivial, donde Q' es subdiagrama lleno de Q . Además, para cada $j = 1, \dots, l$, consideremos subdiagramas llenos Q_{a_j} de Q y sea $\Gamma_{a_j} = kQ_{a_j}/I \cap kQ_{a_j}$. Diremos que Γ se obtiene de Γ' agregando extensiones triviales Γ_{a_j} de tipo de representación finito de clase de Cartan A_{n_j} en a_j , con $j = 1, \dots, l$, si se verifican las siguientes condiciones:

- i) Para cada $j = 1, \dots, l$, Γ_{a_j} es una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan A_{n_j} .
- ii) $Q_0 = Q'_0 \cup (Q_{a_1})_0 \cup \dots \cup (Q_{a_l})_0$ y se verifica, para $j = 1, \dots, l$:

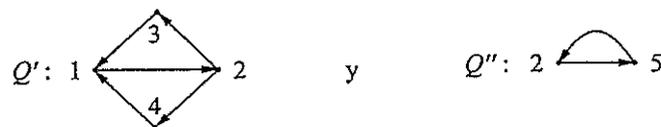
$$Q'_0 \cap (Q_{a_j})_0 = \{a_j\} \quad \text{y} \quad (Q_{a_i})_0 \cap (Q_{a_j})_0 = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

- iii) I está generado por $I \cap kQ'$ y por los ideales $I \cap kQ_{a_j}$

Ejemplo 3.3.5. Sea Q el diagrama



y $\Gamma = kQ/I$ la extensión trivial correspondiente. Consideremos los siguientes subdiagramas llenos de Q :



Es claro que si $\Gamma' = kQ'/I \cap kQ'$ y $\Gamma'' = kQ''/I \cap kQ''$ son las extensiones triviales correspondientes, entonces Γ se obtiene de Γ' agregando la extensión trivial Γ'' de tipo de representación finito de clase de Cartan A_2 en el vértice 2.

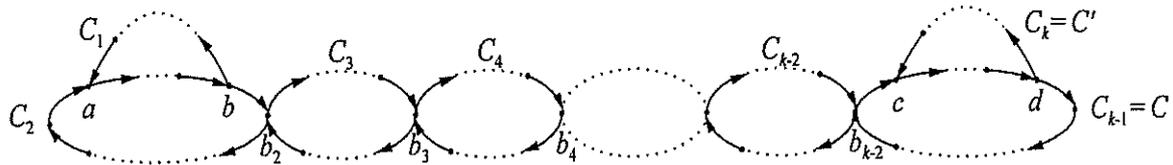
Observación 3.3.6. Mostraremos aquí que son de tipo infinito las extensiones triviales Γ que se obtienen de las dadas en 3.2.8 agregando, para $i = 1, \dots, l$ extensiones triviales Γ_{a_i} de tipo de representación finito de clase de Cartan A_{n_i} en el vértice a_i . En efecto, supongamos por el absurdo que $\Gamma = kQ/I$ es de tipo finito. Luego Γ es de clase de Cartan D_n , con $n \geq 9$. Sea Q' un subdiagrama lleno de Q tal que la extensión trivial $\Gamma' = kQ'/I \cap kQ'$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan E_8 con $rP/\text{soc } P$ indescomponible para todo Γ' -módulo proyectivo indescomponible P .

En Q' , eliminamos flechas $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s$, exactamente una por cada ciclo orientado. Para $i = 1, \dots, l$, eliminamos en Γ_{a_i} flechas apropiadas a fin de obtener un ramo truncado Λ_{a_i} de longitud n_i , con a_i pozo en Λ_{a_i} . De este modo, se tiene un álgebra Λ inclinada iterada de tipo Dynkin D_n , puesto que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$. Por construcción, el cociente $\Lambda' = \Gamma'/\langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_s \rangle$ es una subcategoría convexa llena de Λ . Además, Λ' es inclinada iterada de tipo E_8 , lo cual es una contradicción.

Proposición 3.3.7. *Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, para todo P proyectivo indescomponible. Si Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q , con $Q \neq A_n$, entonces Γ se obtiene de alguna extensión trivial Γ' de las dadas en 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7 agregando extensiones triviales Γ_{a_i} de tipo de representación finito de clase de Cartan A_{n_i} en el vértice a_i , para $i = 1, \dots, l$.*

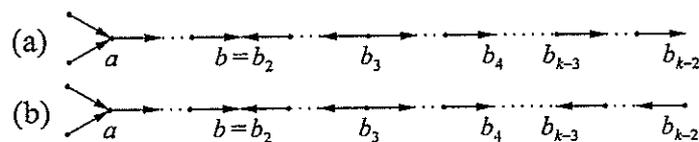
Demostración: Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.1 y del Lema 3.3.8 que enunciamos a continuación. ■

Lema 3.3.8. *Sea $\Gamma = kQ_\Gamma/I$ una extensión trivial, donde Q_Γ es de la siguiente forma:*



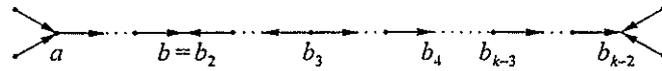
En el diagrama, C_1, \dots, C_k son todos los ciclos orientados no nulos en Γ (salvo reordenamiento de flechas), $a \neq b$, $c \neq d$. Además, para $2 \leq i \leq k-2$, $C_i \cap C_{i+1} = \{b_i\}$, con $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$. Entonces, Γ es de tipo de representación infinito.

Demostración: Si $b = b_2$, elegimos en C_1 y C_2 las flechas que llegan al vértice a y el camino de a en b , en C_3 el camino de b_3 en b_2 , y así siguiendo hasta llegar al vértice b_{k-2} . Es fácil ver que así se obtiene uno de los siguientes diagramas sin relaciones:



Analizaremos el caso (a), pues (b) se estudia de modo análogo. Si $c = b_{k-2}$, seleccionamos

tanto en $C = C_{k-1}$ como en $C' = C_k$ la flecha que llega al vértice c . Resulta así el subdiagrama Q' de Q_Γ que mostramos a continuación:



Luego, el álgebra kQ' es de tipo infinito, y como además kQ' es cociente de Γ , tenemos que Γ es de tipo de representación infinito.

Si en cambio, $c \neq b_{k-2}$, tomamos en el ciclo C el camino $d \rightarrow b_{k-2}$, en C' la flecha que sale del vértice d y la flecha que llega a d y es común a ambos ciclos. Se tiene entonces el subdiagrama de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$:



y como antes, concluimos que Γ es de tipo de representación infinito.

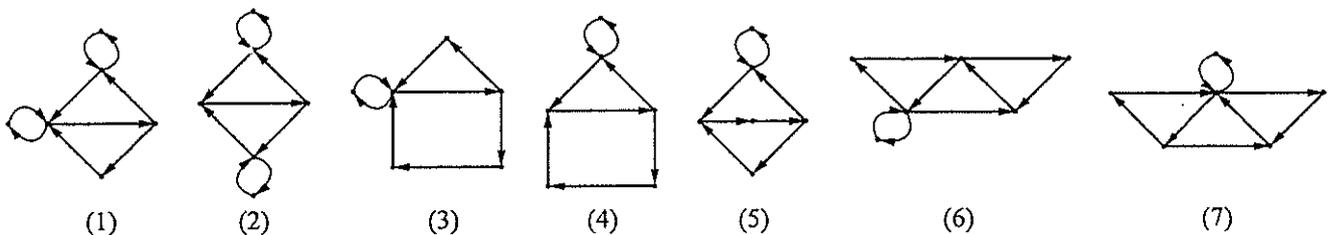
Finalmente, si $b \neq b_2$, se muestra que Γ es de tipo de representación infinito argumentando de manera similar. **■**

De acuerdo a lo visto, para completar la clasificación, debemos estudiar las extensiones triviales que se obtienen de las dadas en 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7 agregando extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan A_n y determinar cuáles de ellas son de tipo finito.

3.3.2 De clase de Cartan \mathbb{E}_6

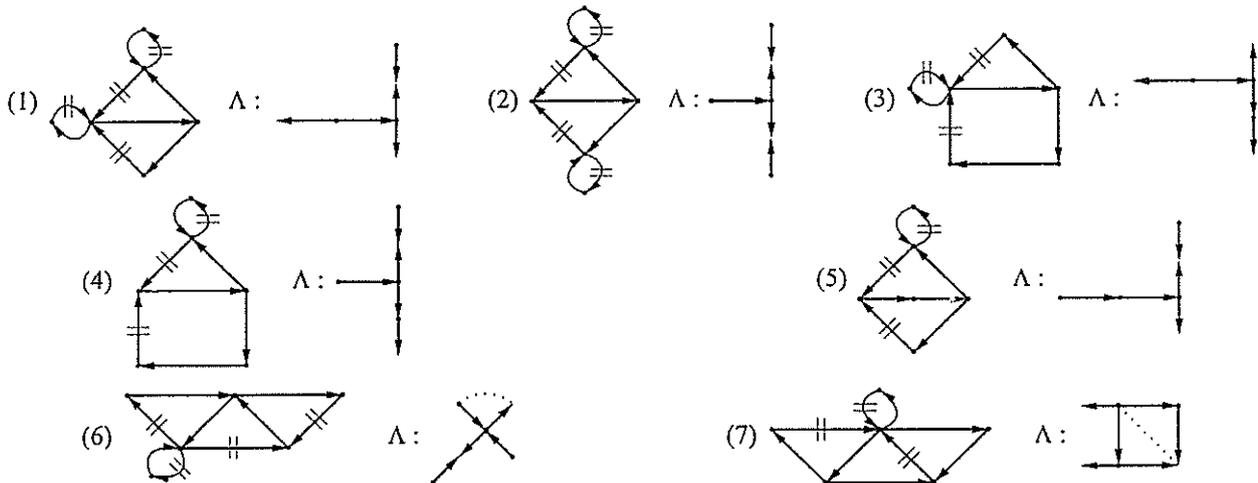
Nos ocuparemos aquí de dar la lista de todas las extensiones triviales de tipo finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 en las cuales el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos.

Teorema 3.3.9. *Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, para todo P proyectivo indescomponible. Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*

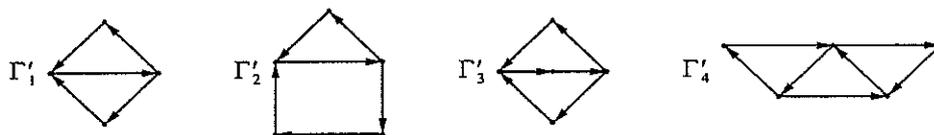


Demostración: Para cada álgebra Γ de la lista, mostramos a continuación un álgebra Λ inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 tal que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$. Luego, por el Teorema [HW], Γ es de tipo

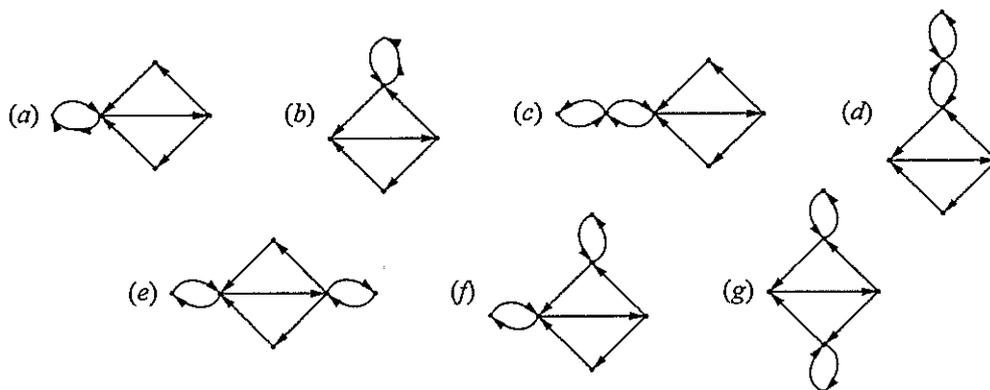
de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 . Como antes, indicamos con “//” las flechas que se eliminan de cada ciclo de Γ :



Recíprocamente, sea Γ una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 , en la cual el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos. En particular, se verifica que el número de vértices de Q_Γ es seis, y Γ tiene al menos dos ciclos no congruentes en algún vértice a . De aquí, es fácil ver que todas las extensiones triviales Γ' dadas por subdiagramas llenos de Q_Γ y que verifican la condición $rP'/\text{soc } P'$ indescomponible para todo Γ' -módulo proyectivo indescomponible P' son las siguientes:

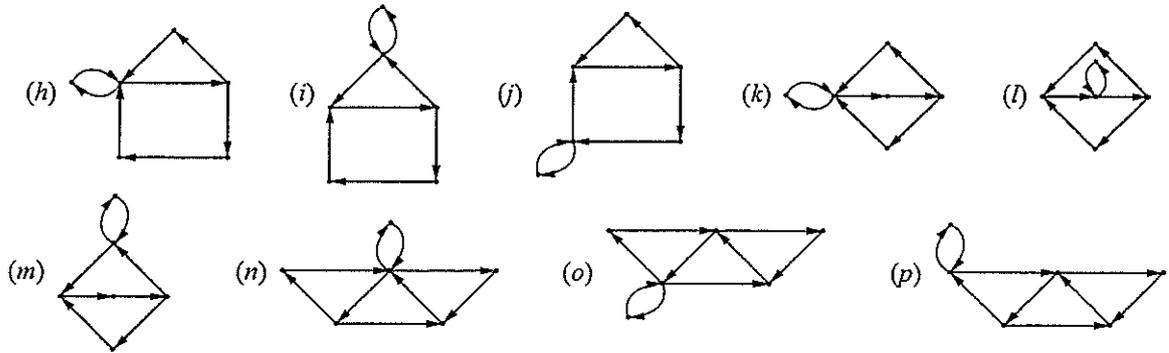


Si Q_Γ contiene a $Q_{\Gamma'_1}$, entonces, teniendo en cuenta el número de ciclos y las condiciones impuestas, resulta que Γ sólo puede ser una de las siguientes álgebras:



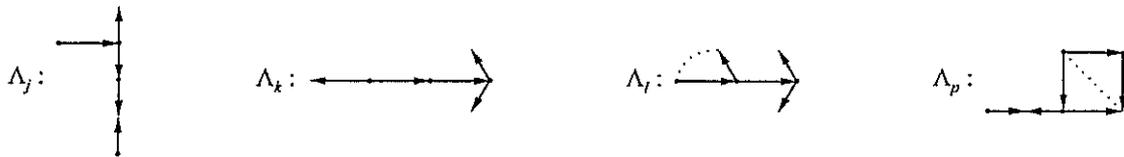
Ahora bien, los casos (a), (b), (c), (d) y (e) corresponden a extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_6 , mientras que, como ya hemos visto (f) y (g) corresponden a extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 .

Para completar nuestro estudio debemos analizar las álgebras que se obtienen agregando un ciclo de longitud dos a los diagramas de Γ'_i ; $i = 2, 3, 4$. Tenemos entonces la siguiente lista:



Ya mostramos que (h), (i), (m), (n) y (o) corresponden a extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 y satisfacen las condiciones requeridas.

Los casos restantes son extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_6 . En efecto, cada una de las álgebras siguientes es inclinada de tipo Dynkin \mathbb{D}_6 y sus extensiones triviales son (j), (k), (l) y (p), respectivamente:



Con esto, la demostración está completa. **■**

3.3.3 De clase de Cartan \mathbb{D}_n

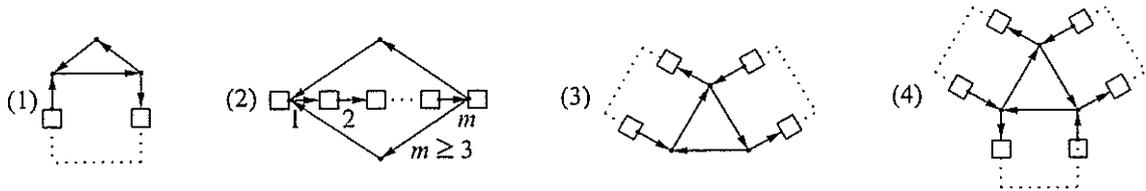
Esencialmente, probaremos a continuación que las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n para las cuales el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, se obtienen de las dadas en 3.2.6 agregando en ciertos vértices extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_{n_i} , donde $n_i < n$. En lo que sigue, indicaremos a tales vértices con “□”. Comenzamos nuestro estudio con la siguiente observación:

Observación 3.3.10. Es importante notar que las extensiones triviales Γ de tipo finito que se obtienen de las álgebras Γ' dadas en 3.2.5 y 3.2.7 agregando extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_m , son de clase de Cartan Q , con $Q \neq \mathbb{D}_n$.

En efecto, supongamos que la extensión trivial Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Q y se obtiene de un álgebra Γ' de las mencionadas, agregando extensiones triviales Γ_{a_i} de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_{n_i} en a_i , para $i = 1, \dots, l$. Se tiene, para cada i , que Γ_{a_i} es isomorfa a $T(\Lambda_{a_i})$, donde Λ_{a_i} es un ramo truncado en a_i y a_i es un pozo en Λ_{a_i} . Eliminando de los ciclos de $Q_{\Gamma'}$ exactamente una flecha, se obtiene un álgebra, digamos

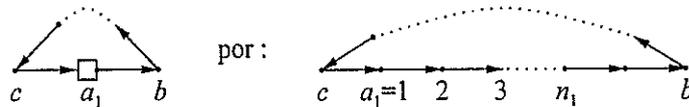
Λ' . Eliminando además en cada $Q_{\Gamma_{a_i}}$ flechas apropiadas para obtener Λ_{a_i} , resulta un álgebra Λ inclinada iterada de tipo Dynkin Q tal que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$. El álgebra Λ' es inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_p , con $p = 6, 7$. Más aún, por construcción, Λ' es una subcategoría convexa llena de Λ . Se sigue entonces que $Q \neq \mathbb{D}_n$.

Teorema 3.3.11. *Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, para todo P proyectivo indescomponible. Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*



Cada una de estas extensiones triviales contiene al menos un vértice con “□”.

Demostración: Para cada álgebra Γ de la lista es posible probar que Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n por inducción en r , donde r es el número de vértices de Q_Γ señalados como “□”. La idea de la demostración es la siguiente: se elige en Γ uno cualquiera de los vértices indicados con “□”, designemos con a_1 a dicho vértice. Se reemplaza



donde n_1 es el número de vértices de la extensión trivial Γ_{a_1} de tipo finito de clase de Cartan \mathbb{A}_{n_1} . Se obtiene así un álgebra Γ' con el mismo tipo de representación y la misma clase de Cartan que Γ . Γ' tiene $r - 1$ vértices señalados con “□”.

Haremos con todo detalle la demostración cuando Γ es el álgebra (4). Para los restantes casos, el procedimiento es totalmente análogo aunque más sencillo.

Sea $r = 1$ y a_1 un vértice de Q_Γ tal que $\Gamma_{a_1} = kQ_{a_1}/I \cap kQ_{a_1}$ es una extensión trivial de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_{n_1} , con Q_{a_1} subdiagrama lleno de Q . Se sigue de la **Observación 3.3.3** que $\Gamma_{a_1} \simeq T(\Lambda_{a_1})$, donde Λ_{a_1} es un ramo truncado en a_1 de longitud n_1 y a_1 es un pozo en Λ_{a_1} . Eliminando de los ciclos de Γ_{a_1} flechas apropiadas para obtener Λ_{a_1} y de los restantes ciclos de Γ las flechas que se indican con “//”, resulta el álgebra Λ dada por

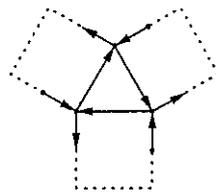
el siguiente diagrama con relaciones:



donde en a_1 se tiene el ramo truncado Λ_{a_1} . Consideremos el álgebra Λ' que se obtiene a partir de Λ reemplazando el ramo truncado Λ_{a_1} por

$$\overrightarrow{a_1=1} \quad \overrightarrow{n_1}$$

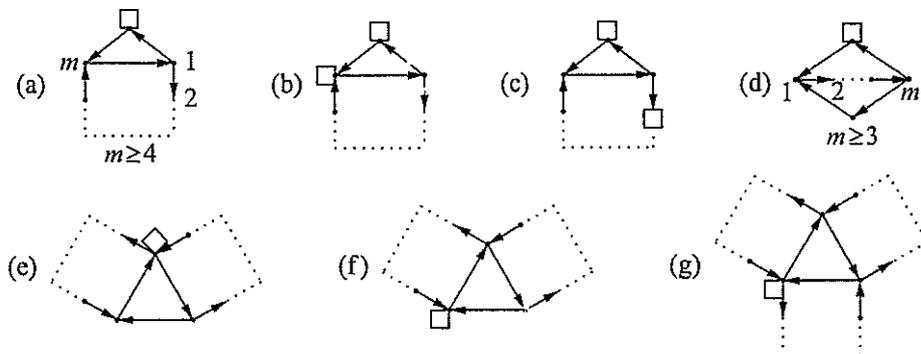
De acuerdo al Corolario 3.1.11, $\Lambda' = \text{End}_\Lambda(U)^{op}$, para algún Λ -módulo inclinante U . Ahora bien, Λ' es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n , pues $T(\Lambda')$ es isomorfa a la extensión trivial:



que es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n , según vimos en 3.2.6. En consecuencia, Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n y de aquí: $\Gamma \simeq T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n .

Si $r > 1$, se elige un vértice indicado con "□", digamos a_1 . El mismo argumento usado cuando $r = 1$ se aplica aquí, con la diferencia que el álgebra Λ' obtenida es tal que $T(\Lambda')$ es como (5), pero con $r - 1$ vértices señalados con "□". Vale entonces la hipótesis inductiva para $T(\Lambda')$.

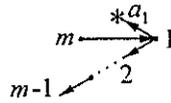
Para probar la suficiencia, basta verificar, de acuerdo con la Observación 3.3.10 que las siguientes álgebras no son de clase de Cartan \mathbb{D}_n :



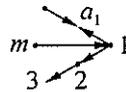
Usaremos la misma técnica aplicada anteriormente. Es decir, en cada caso, hallamos un álgebra

Λ , tal que su extensión trivial sea isomorfa al álgebra Γ definida y mostramos una subcategoría convexa llena de Λ , inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_6 . Indicamos con “*” los vértices a de Λ en los cuales se tiene un ramo truncado de longitud mayor o igual que dos y tales que a es un pozo del mismo.

En el primer caso, sea Λ el álgebra dada por el siguiente diagrama con relaciones:

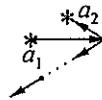


Luego:

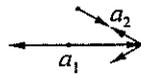


es una subcategoría convexa llena de Λ , inclinada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 .

Para el caso (b), consideremos el álgebra Λ :

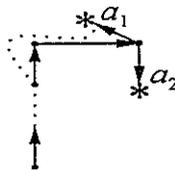


En consecuencia:

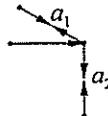


es una subcategoría convexa llena de Λ , inclinada de tipo \mathbb{E}_6 .

Si Γ es el álgebra (c), elegimos Λ como sigue:

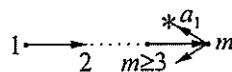


Se tiene entonces que

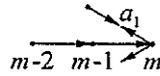


es una subcategoría convexa llena de Λ , inclinada de tipo \mathbb{E}_6 .

Cuando Γ es el álgebra (d), consideramos Λ :

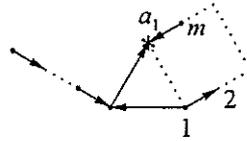


Por lo tanto:

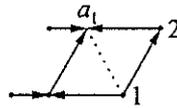


es una subcategoría convexa llena de Λ , inclinada de tipo \mathbb{E}_6 .

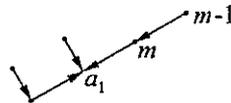
Para el álgebra (e) sea Λ dada por el diagrama con relaciones:



Si $m = 2$, la subcategoría convexa llena de Λ que sigue:

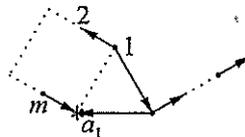


es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , pues según vimos en 3.3.2, su extensión trivial es de tipo finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 . Cuando $m > 2$, consideramos la siguiente subcategoría convexa llena de Λ :

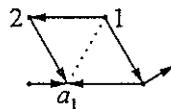


que es inclinada de tipo \mathbb{E}_6 .

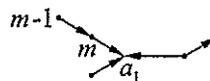
Si Γ es el álgebra (f), consideramos Λ :



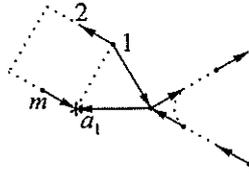
Como en el caso anterior, si $m = 2$, la subcategoría convexa llena de Λ



es, de acuerdo a lo visto en 3.3.2, inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_6 . Para $m > 2$, se puede elegir como subcategoría convexa llena de Λ , inclinada de tipo \mathbb{E}_6 la siguiente:



Por último, si Γ es el álgebra (g) , sea Λ :

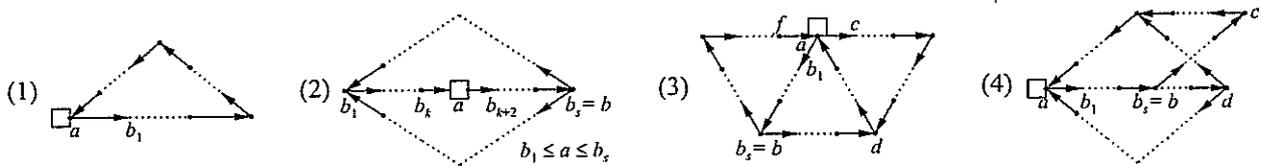


El estudio del caso precedente nos permite afirmar, que Λ tiene una subcategoría convexa llena inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_6 . Esto concluye la demostración del teorema. ■

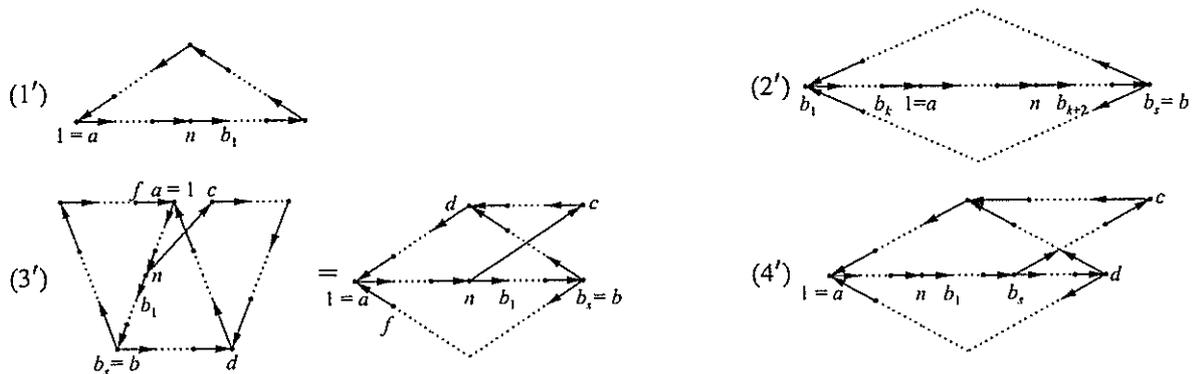
3.3.4 De clase de Cartan \mathbb{E}_7

A continuación nos ocuparemos de la clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 para las cuales el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos. Comenzamos con los siguientes lemas que serán de gran utilidad en la resolución de nuestro problema de clasificación, pues permiten reducir varios casos a otros estudiados previamente. Como hasta ahora, el símbolo “□” en un vértice a de una extensión trivial $\Gamma = kQ/I$ dada indica que en ei mismo hay una extensión trivial Γ_a de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n .

Lema 3.3.12. Sea $\Gamma = kQ/I$ la extensión trivial dada por uno de los siguientes diagramas, con las relaciones correspondientes:



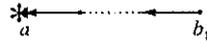
y sea $\Sigma = kQ'/I'$ la extensión trivial dada por uno de los siguientes diagramas, con las relaciones correspondientes:



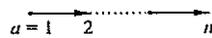
Para cada $i = 1, 2, 3, 4$ se tiene que la extensión trivial Γ dada en el caso (i) es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ si, y sólo si, la extensión trivial Σ dada en el caso (i') es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ .

Demostración: Sea $\Gamma = kQ/I$ la extensión trivial dada en (i). De acuerdo a la **Observación 3.3.3**, $\Gamma_a = kQ_a/I \cap kQ_a$ es isomorfa a $T(\Lambda_a)$, donde Λ_a es un ramo truncado en a de longitud n y a es un pozo en Λ_a . Por lo tanto, $\Lambda_a \simeq \Gamma_a/J_a$, para algún ideal bilátero J_a .

Si $i = 1$, el álgebra cociente $\Lambda = \Gamma/J$, donde J es el ideal bilátero generado por J_a y la flecha con origen en el vértice a , está dada por el diagrama con relaciones siguiente:

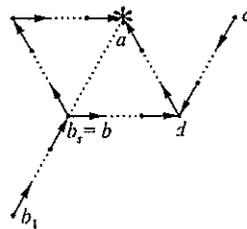


El símbolo “*” indica Λ tiene en a un ramo truncado de longitud n tal que a es un pozo del mismo. Además, $\Gamma \simeq T(\Lambda)$. Sea Λ' el álgebra que se obtiene a partir de Λ reemplazando el ramo truncado Λ_a por:



Se sigue de aquí que $\Sigma \simeq T(\Lambda')$. Luego, Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ si, y sólo si, Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Δ . Del **Corolario 3.1.11** resulta que Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin Δ si, y sólo si Λ' es inclinada iterada de tipo Dynkin Δ . En consecuencia, Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ si, y sólo si, Σ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ .

Si $i = 3$, consideramos el álgebra cociente $\Lambda = \Gamma/J$, donde J es el ideal bilátero generado por J_a y las flechas $\alpha : a \rightarrow b_1$, $\beta : a \rightarrow c$, dada por el diagrama con relaciones siguiente:



De aquí en más, la demostración sigue como en el caso precedente.

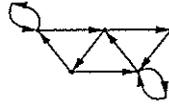
Para $i = 2$ la afirmación resulta, como en el caso previo, si se elige J como el ideal bilátero generado por J_a y por la flecha con origen en el vértice a .

Finalmente, para $i = 4$, se elige J como el ideal bilátero generado por J_a y las dos flechas con origen en el vértice b . ■

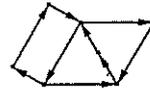
Lema 3.3.13. *Sea Γ una extensión trivial tal que la situación local en el vértice a es la descrita en el caso (i) del Lema 3.3.12, con $i = 1, 2, 3, 4$, y Σ la extensión trivial que resulta de Γ reemplazando la situación (i) por la situación (i'), entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ si, y sólo si, Σ es de tipo de representación finito de clase de Cartan Δ .*

Demostración: Los argumentos usados en la demostración del Lema 3.3.12 valen en este caso. ■

Ejemplo 3.3.14. Sea Q el diagrama

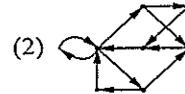
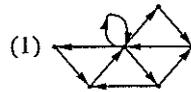


y sea $\Gamma = kQ/I$ la extensión trivial correspondiente. Resulta del Corolario 3.2.7 que la extensión trivial $\Sigma = kQ'/I'$, donde Q' es el diagrama:

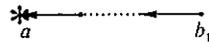


con las relaciones pertinentes, es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 , se sigue entonces que Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 .

Lema 3.3.15. Las extensiones triviales definidas por los siguientes diagramas, con las relaciones correspondientes, son de tipo de representación infinito:



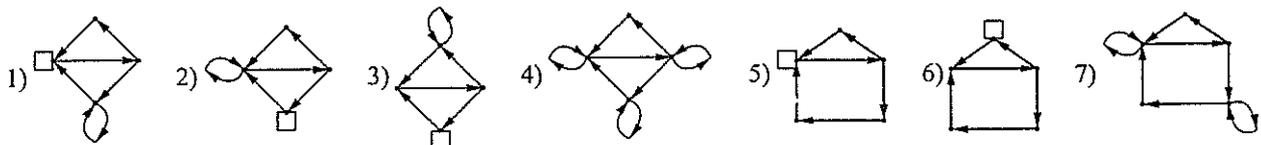
Demostración: Para cada extensión trivial Γ_i , con $i = 1, 2$, mostramos a continuación un álgebra Λ_i , que contiene un subdiagrama convexo lleno Δ_i de la lista [HV] y tal que $T(\Lambda_i) \simeq \Gamma_i$, probando así que Γ_i es de tipo de representación infinito.

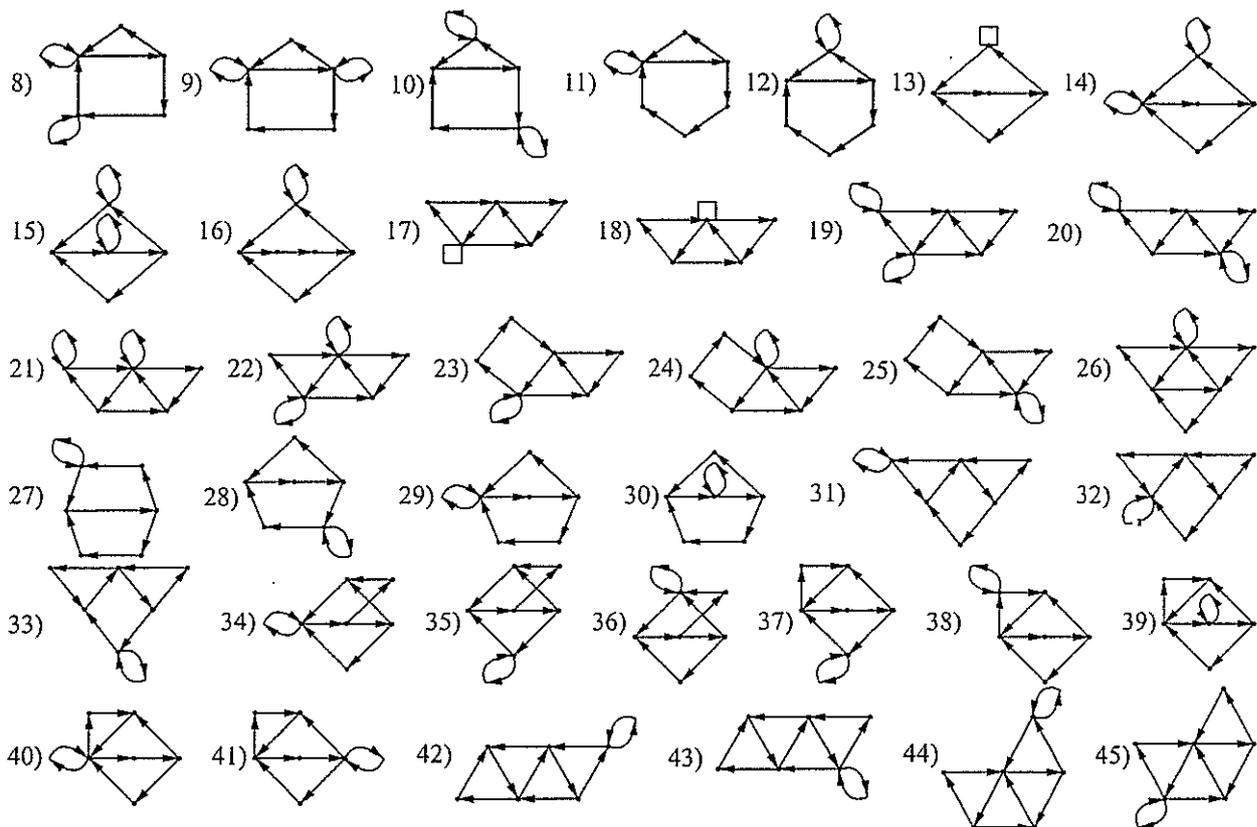


Lo que completa la demostración. \blacksquare

En el teorema siguiente, el símbolo “ \square ” en un vértice de una extensión trivial Γ dada, indica que en el mismo hay una extensión trivial Γ_a de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n , con n apropiado, de modo que el diagrama ordinario de Γ tenga siete vértices y se satisfagan las condiciones de la Definición 3.3.4.

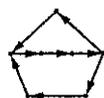
Teorema 3.3.16. Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, para todo P proyectivo indescomponible. Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:





Demostración: Cada álgebra Γ de la lista satisface que para todo Γ -módulo proyectivo indecomponible P , el máximo número de sumandos directos indecomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos. Para verificar que Γ es de tipo de representación finito de clase Cartan \mathbb{E}_7 basta, según el Lema 3.3.12 y el Lema 3.3.15, comparar Γ con una extensión trivial Σ de las dadas en el Corolario 3.2.7. Más aún, hecho esto, los lemas y el corolario mencionados nos permiten concluir que la lista está completa. A continuación mostramos el álgebra Σ considerada en los distintos casos.

Para las álgebras (1), (4), (5), (9), (14), (15), (16), (29) y (30) de la lista, Σ es la extensión trivial:



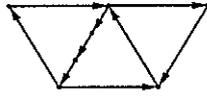
En los casos (2), (7), (8), (11), (13) y (28), el álgebra Σ es la siguiente:



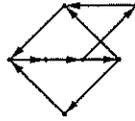
Si Γ es (3), (6), (10), (12) o (27), consideramos Σ :



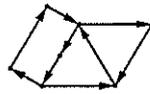
Las álgebras (17), (39) y (41) se comparan con la extensión trivial Σ :



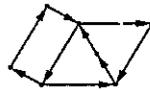
Para las álgebras (18) y (34) Σ es:



En los casos (19), (23) y (37), la extensión trivial Σ es la siguiente:



Las álgebras (20) y (25) se comparan con Σ :

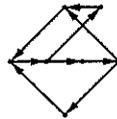


y el álgebra (38) con Σ^{op} .

Si Γ es (21), (24) o (35), se considera Σ :

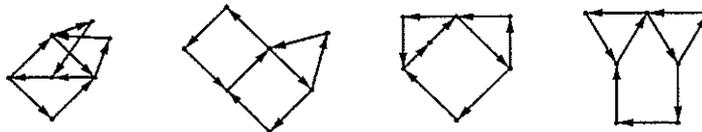


En los casos (22) y (40), Σ es el álgebra dada por:



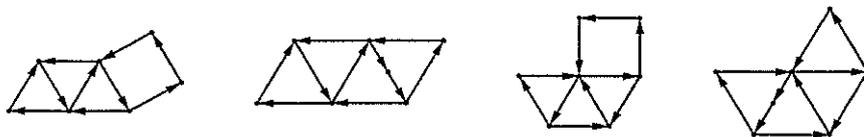
y para el álgebra (36) tomamos Σ^{op} .

Las álgebras (26), (31), (32) y (33) de la lista se comparan, respectivamente, con las siguientes Σ :



Finalmente, las álgebras (42), (43), (44) y (45) se comparan, respectivamente, con las ex-

tensiones triviales Σ siguientes:

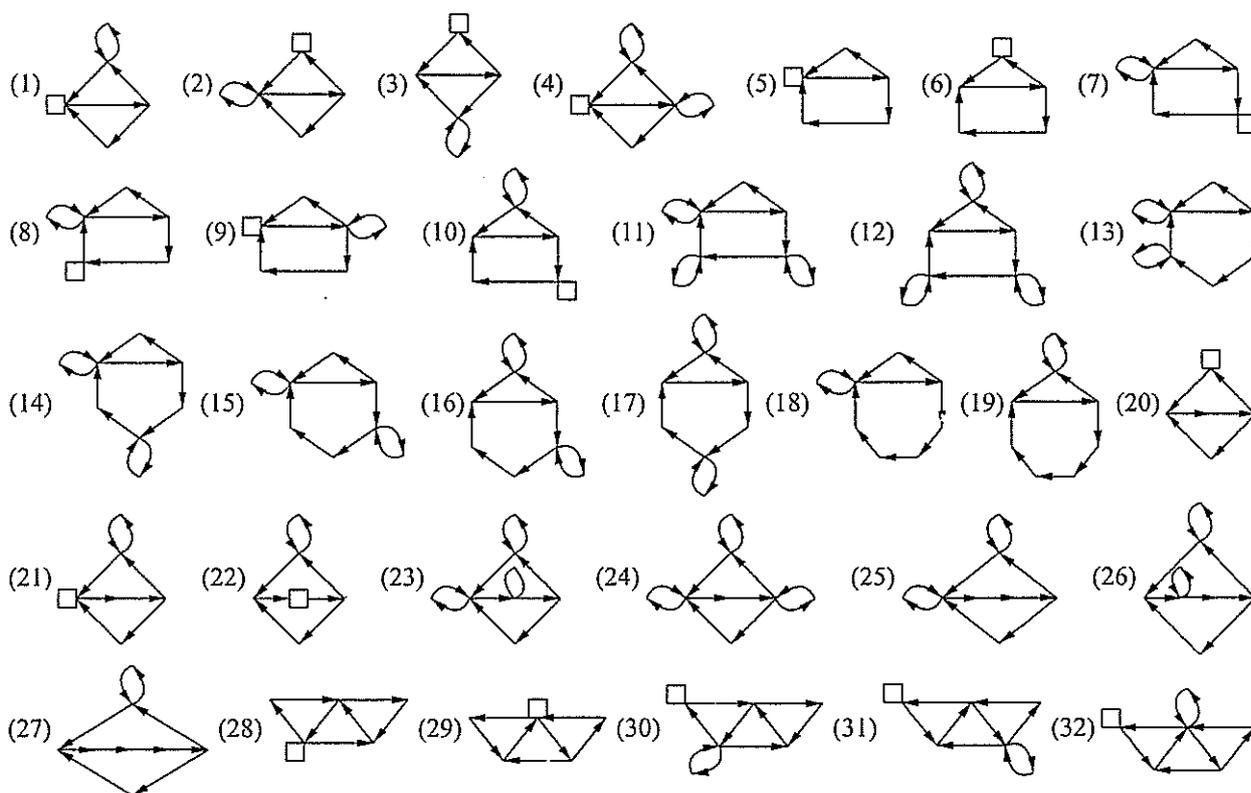


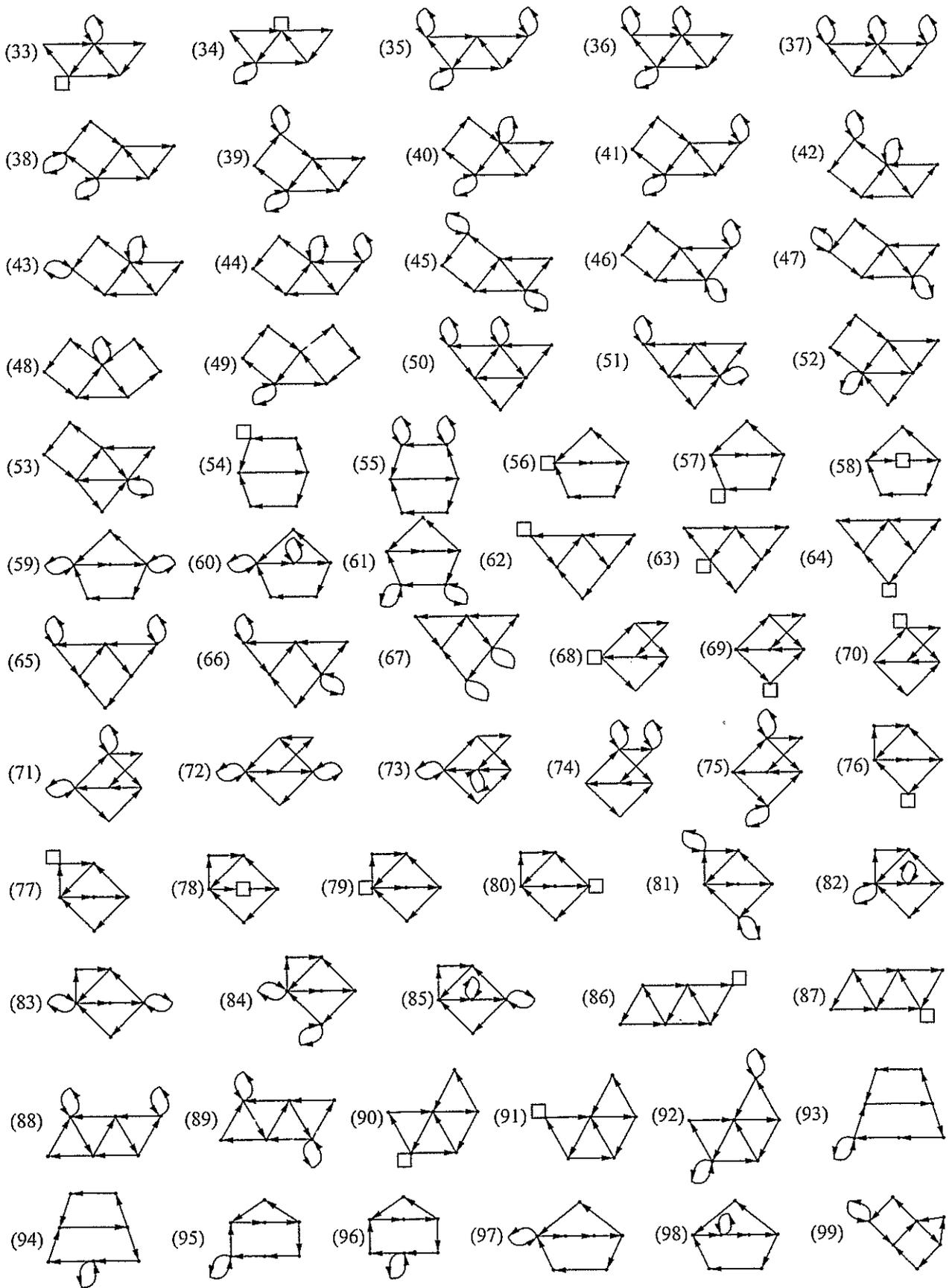
Así la demostración del teorema está completa. \blacksquare

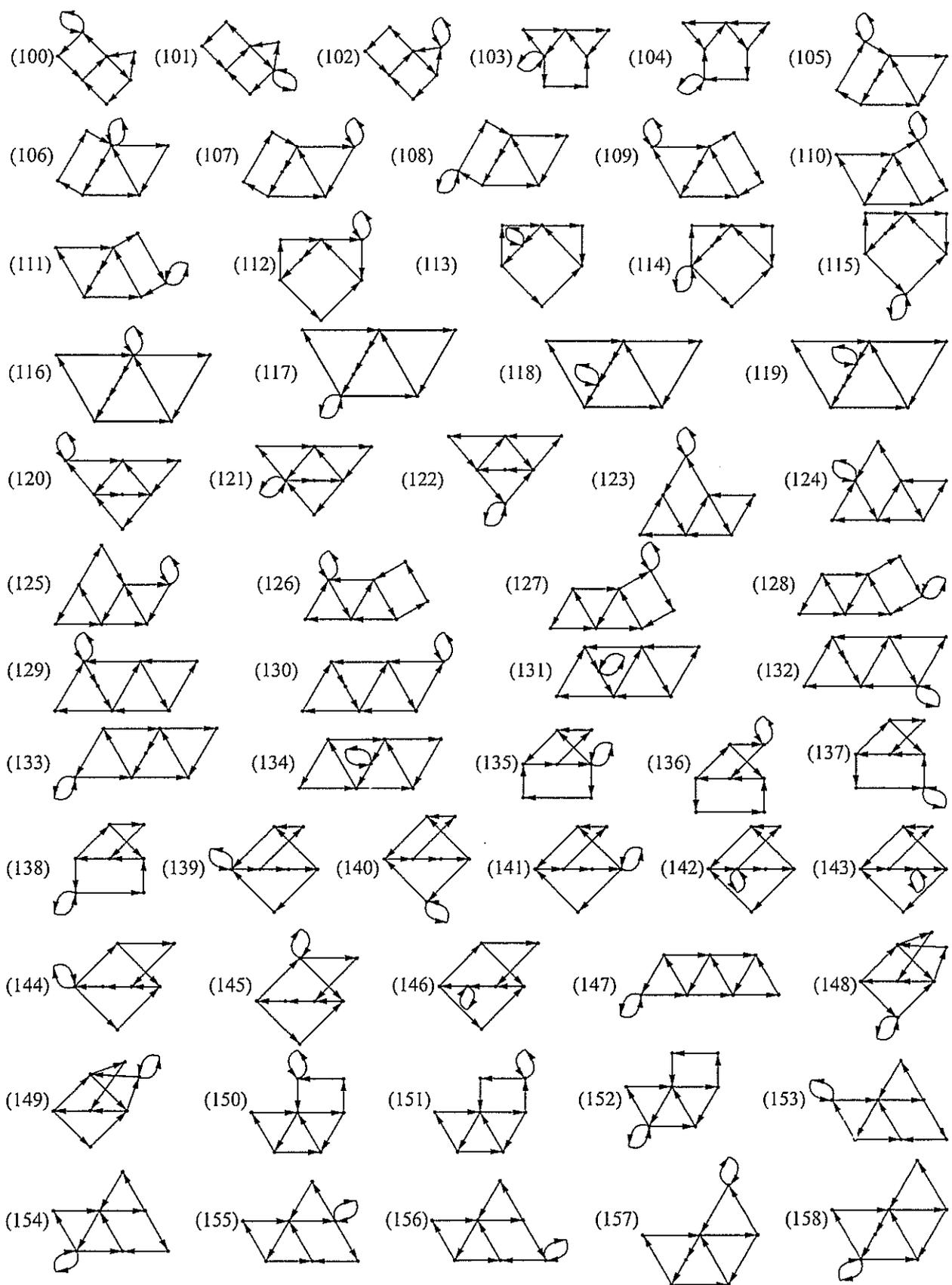
3.3.5 De clase de Cartan \mathbb{E}_8

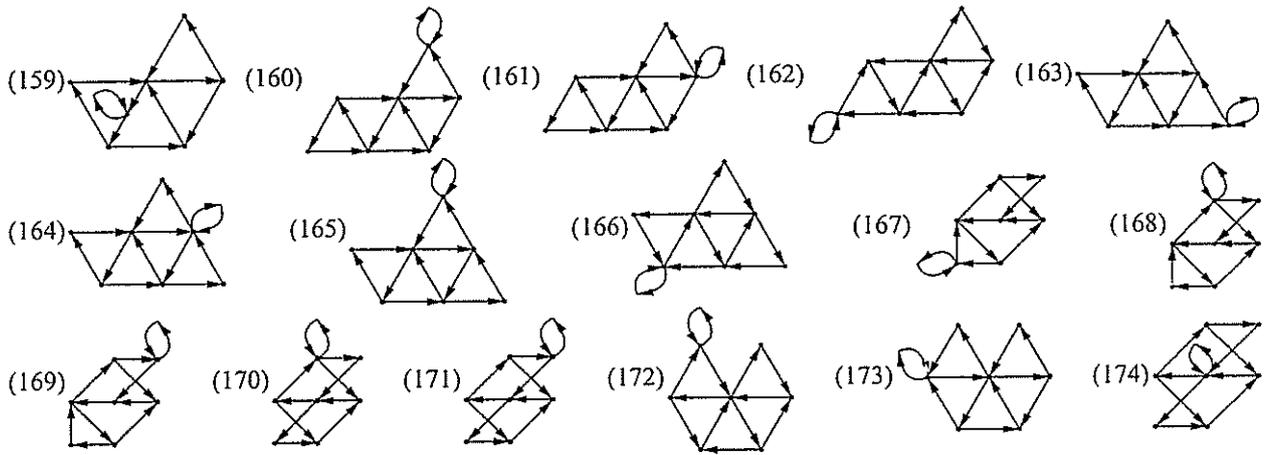
Nos ocuparemos aquí de la clasificación de las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 para las cuales el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos. En el siguiente teorema, el símbolo " \square " en un vértice de una extensión trivial Γ dada, indica que en el mismo hay una extensión trivial Γ_a de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n , con n apropiado, de modo que el diagrama ordinario de Γ tenga ocho vértices y se satisfagan las condiciones de la **Definición 3.3.4**.

Teorema 3.3.17. *Sea Γ una extensión trivial tal que el máximo número de sumandos directos indescomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos, para todo P proyectivo indescomponible. Entonces Γ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 si, y sólo si, el diagrama ordinario de Γ es uno de los siguientes:*









Demstración: Cada álgebra Γ de la lista satisface que para todo Γ -módulo proyectivo indecomponible P , el máximo número de sumandos directos indecomponibles de $rP/\text{soc } P$ es dos. Para verificar que Γ es de tipo de representación finito de clase Cartan \mathbb{E}_g basta, según el Lema 3.3.12 y el Lema 3.3.15, comparar Γ con una extensión trivial de las dadas en el Corolario 3.2.9. Hecho esto, los lemas y el corolario mencionados nos permiten concluir que la lista está completa.

Las álgebras (1), (4), (5), (9), (21), (22), (23), (24), (26), (27), (54), (55), (56), (58), (59), (60), (97) y (98) de la lista, se comparan con la extensión trivial (3) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (2), (7), (8), (11), (13), (14), (15), (18), (20), (57), (61), (95) y (96), consideramos la extensión trivial (2) del Corolario 3.2.9.

En los casos (3), (6), (10), (12), (16), (17), (19), (93) y (94), comparamos con la extensión trivial (1) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (28), (78), (80), (85), (117), (118) y (119) se comparan con la extensión trivial (13) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (29), (68), (73), (144) y (146), consideramos la extensión trivial (36) del Corolario 3.2.9.

En los casos (30), (38), (39), (76), (105) y (108), comparamos con la extensión trivial (7) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (31), (45), (47), (77), (110) y (111) se comparan con la extensión trivial (9) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (32), (42), (43), (69), (137) y (138), consideramos la extensión trivial (32) del Corolario 3.2.9.

En los casos (33), (70), (82), (83), (116), (141) y (143), comparamos con la extensión trivial (34) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (34), (71), (72), (79), (139), (142) y (145) se comparan con la extensión trivial (35) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (35), (41), (46), (49), (81), (107) y (109), consideramos la extensión trivial (8) del Corolario 3.2.9.

En los casos (36), (40), (74), (84), (106), (135) y (140), comparamos con la extensión trivial (76) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (37), (44), (48), (75) y (136) se comparan con la extensión trivial (33) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (50), (52) y (148), consideramos la extensión trivial (37) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (51), (53) y (149) se comparan con la extensión trivial (38) del Corolario 3.2.9.

En los casos (62), (99) y (100), comparamos con la extensión trivial (5) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (63), (113) y (114), consideramos la extensión trivial (12) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (64) y (104) se comparan con la extensión trivial (4) del Corolario 3.2.9.

En los casos (65) y (102), comparamos con la extensión trivial (6) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (66), (101) y (112), consideramos la extensión trivial (10) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (67), (103) y (115) se comparan con la extensión trivial (11) del Corolario 3.2.9.

En los casos (86), (127) y (128), comparamos con la extensión trivial (17) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (87), (129) y (131), consideramos la extensión trivial (24) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (88), (126) y (130) se comparan con la extensión trivial (23) del Corolario 3.2.9.

En los casos (89) y (132), comparamos con la extensión trivial (26) del Corolario 3.2.9.

Para las álgebras (90), (158) y (159), consideramos la extensión trivial (46) del Corolario 3.2.9.

En los casos (91), (150) y (151), comparamos con la extensión trivial (40) del Corolario 3.2.9.

Las álgebras (92), (152) y (157) se comparan con la extensión trivial (44) del Corolario 3.2.9.

Finalmente, las álgebras (120), (121), (122), (123), (124), (125), (133), (134), (147), (153), (154), (155), (156), (160), (161), (162), (163), (164), (165), (166), (167), (168), (169), (170), (171), (172), (173) y (174) se comparan, respectivamente, con las extensiones triviales (14),

(39), (15), (16), (21), (19), (20), (25), (27), (42), (43), (45), (41), (47), (51), (50), (53), (70), (54), (56), (57), (61), (59), (63), (62), (71), (73) y (77) del Corolario 3.2.9. ■

Capítulo 4

Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin

Es importante notar que los resultados obtenidos en los capítulos 1 y 3 permiten determinar con facilidad si un álgebra es inclinada iterada de tipo Dynkin. Más precisamente, dada un álgebra Λ , en primer lugar se describe $T(\Lambda)$ como el álgebra de caminos de un diagrama con relaciones, usando los teoremas 1.2.2 y 1.3.4. El siguiente paso es ver si $T(\Lambda)$ es isomorfa a alguna de las álgebras caracterizadas o listadas en el **Capítulo 3**.

Por otra parte, dada una extensión trivial Γ de tipo de representación finito de clase de Cartan Q , todas las álgebras Λ que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo no nulo de Q_Γ son inclinadas iteradas de tipo Dynkin Q , pues $\Gamma \simeq T(\Lambda)$.

El presente capítulo está dividido en tres secciones. En la primera veremos cómo obtener, empleando los métodos indicados previamente, las caracterizaciones de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin A_n y D_n , dadas en [AsH] y [AsS2, K], respectivamente.

Con las mismas técnicas, mostraremos cómo hallar la clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipo E_6 , dadas por D. Happel en [Ha].

La segunda sección está dedicada al estudio de las álgebras inclinadas iteradas de tipos E_7 y E_8 . Si bien no daremos una lista completa de las mismas, incluimos allí una serie de ejemplos que ilustran cómo decidir si un álgebra dada es inclinada iterada de tipo E_7 ó E_8 .

En la última sección incluimos la caracterización dada por I. Assem, J. Nehring y A. Skowroński en [AsNS] sobre extensiones triviales domésticas de álgebras simplemente conexas. Usando este importante resultado, la descripción del diagrama y relaciones de la extensión trivial de un álgebra schurian dada en el **Capítulo 1** y la lista [HV], damos algunos ejemplos de álgebras inclinadas iteradas de tipo \tilde{D}_n ó \tilde{E}_p de tipo de representación finito.

4.1 Álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n y \mathbb{E}_6

4.1.1 Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{A}_n

I. Assem y D. Happel clasificaron en [AsH] las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{A}_n . Antes de enunciar el teorema correspondiente, es necesario recordar que si $\Lambda = kQ/I$, una relación $r = \sum_{i \in J} \delta_i$ de I , con δ_i caminos de x a y , se dice *minimal* si $\sum_{i \in J_0} \delta_i \notin I$, para todo subconjunto no vacío $J_0 \subseteq J$.

Recordemos también que dado un vértice a de un diagrama Q , se dice que b es *vecino* de a si existe una flecha de a en b o bien, una de b en a .

En adelante, designaremos con $|Q|$ al grafo no orientado de Q .

Teorema 4.1.1 (Assem – Happel). *Sea $\Lambda = kQ/I$ una k -álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) Λ es inclinada iterada de tipo \mathbb{A}_n .
- ii) El diagrama con relaciones (Q, I) verifica las siguientes condiciones:
 - b₁) $|Q|$ es un árbol
 - b₂) Las relaciones minimales son relaciones cero de longitud dos.
 - b₃) Todo vértice tiene, a los sumo, cuatro vecinos
 - b₄) Si un vértice tiene cuatro vecinos, entonces:

$$\begin{array}{c}
 \beta \quad \alpha \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \delta \quad \gamma
 \end{array}
 \quad \text{con } \beta\alpha = \delta\gamma = 0$$

es un diagrama lleno de (Q, I) .

- b₅) Si un vértice tiene tres vecinos, entonces:

$$\begin{array}{c}
 \beta \uparrow \alpha \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \text{con } \beta\alpha = 0, \text{ o bien: } \quad \begin{array}{c} \beta \downarrow \alpha \\ \hline \end{array}
 \quad \text{con } \beta\alpha = 0$$

es un subdiagrama lleno de (Q, I) . En particular:

$$\begin{array}{c}
 \alpha \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \gamma \quad \beta
 \end{array}
 \quad \text{con } \gamma\alpha = \gamma\beta = 0
 \quad \text{y} \quad
 \begin{array}{c}
 \beta \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \gamma \quad \alpha
 \end{array}
 \quad \text{con } \beta\alpha = \gamma\alpha = 0$$

no son subdiagramas llenos de (Q, I) .

Demostraremos a continuación este resultado aplicando el Teorema [AHR] y los resultados obtenidos en el Capítulo 3 sobre las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n .

Demostración: (del teorema 4.1.1) Sea $\Lambda = kQ/I$ una k -álgebra de dimensión finita, básica y conexa y supongamos que Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin A_n . Del Teorema [AHR] se sigue que $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan A_n , luego, por el Teorema 3.1.13, el Corolario 3.2.4 y el Teorema 3.3.2, resulta que $T(\Lambda)$ satisface las siguientes condiciones:

i) Para todo vértice a en $Q_{T(\Lambda)}$, cada clase de congruencia de ciclos en C_a tiene un único elemento.

ii) Si C_1, \dots, C_l son ciclos orientados en $Q_{T(\Lambda)}$ tales que

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset, \dots, C_{l-1} \cap C_l \neq \emptyset,$$

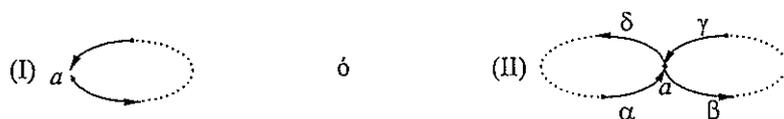
entonces $C_l \cap C_1 = \emptyset$.

iii) Para todo $T(\Lambda)$ -módulo proyectivo indescomponible P , $rP/\text{soc } P$ tiene a lo sumo dos sumandos directos indescomponibles.

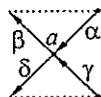
Es claro que de (i) y (ii) resulta que $|Q|$ es un árbol; es decir, (Q, I) verifica la condición $b_1)$.

El Teorema 1.3.4 y la condición (i) implican que las relaciones minimales son relaciones cero de longitud dos.

Cada vértice a de Q_Λ es también un vértice de $Q_{T(\Lambda)}$. Por (i) y (iii), sabemos que a está en un sólo ciclo orientado, o bien en dos ciclos orientados no congruentes en $T(\Lambda)$. Es decir, la situación local en a es:

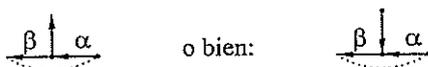


Luego a tiene en Λ , a lo sumo, cuatro vecinos y tiene exactamente cuatro cuando las flechas α, β, γ y δ pertenecen a $(Q_\Lambda)_1$. Más aún, en este caso se tiene, por el Teorema 1.3.4 que:



Lo que prueba $b_4)$.

Por otra parte, si $a \in (Q_\Lambda)_0$ tiene exactamente tres vecinos, entonces la situación local en a , considerado como vértice de $Q_{T(\Lambda)}$ es (II) y además, α o δ no pertenecen a $(Q_\Lambda)_1$. Se sigue de aquí que:

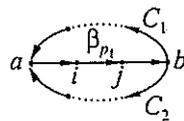


es un subdiagrama lleno de (Q, I) . Esto muestra la validez de b_5).

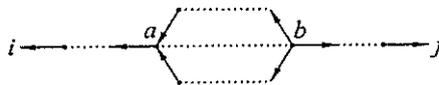
Para probar la recíproca, veremos que si (Q, I) verifica las condiciones b_1) a b_5), entonces $T(\Lambda)$ satisface (i), (ii) y (iii).

Probaremos en primer lugar la condición (i). Para todo a cada clase de congruencia de ciclos tiene un sólo elemento. Supongamos, por el absurdo, que existe un vértice a en $(Q_\Lambda)_0$ con una clase de congruencia de ciclos en \mathcal{C}_a que tiene más de un elemento. Es claro que basta analizar el caso en que dicha clase tiene dos ciclos. Sean entonces C_1 y C_2 ciclos en \mathcal{C}_a tales que $C_1 \cap C_2$ es un camino γ de longitud mayor o igual que uno.

Consideremos p_1 y p_2 , caminos maximales en Q_Λ , contenidos en C_1 y C_2 , respectivamente. Entonces $\beta_{p_1} p_1$ y $\beta_{p_2} p_2$ son ciclos elementales; y algún reordenamiento circular de las flechas de los mismos, da C_1 y C_2 respectivamente. Si γ contiene a β_{p_1} , entonces la situación local en a es:

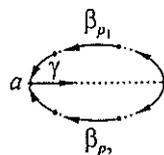


Luego, eliminando β_{p_1} se tiene:



lo cual es absurdo, pues Q_Λ es un árbol.

Supongamos, en cambio, que γ no contiene β_{p_1} , entonces la situación local en a es:



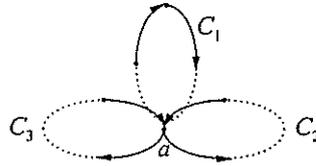
Eliminando las flechas β_{p_1} y β_{p_2} se obtiene el siguiente subdiagrama lleno de Q_Λ :



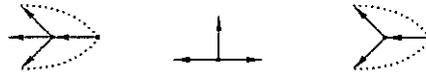
Esto contradice b_2), o bien b_5).

La condición (ii) se satisface, pues $|Q|$ es un árbol. Resta probar la condición (iii). En primer lugar, supongamos por el absurdo, que existe $a \in (Q_{T(\Lambda)})_0$ tal que el módulo $rP_a/\text{soc } P_a$ tiene tres sumandos directos indescomponibles. En el conjunto \mathcal{C}_a de los ciclos orientados no nulos con origen en a hay tres ciclos no congruentes; digamos C_1 , C_2 y C_3 . Entonces la situación

local en a es la siguiente:



Consideremos las flechas con origen o fin en a , en C_1 , C_2 y C_3 . Analizando cuáles de ellas pertenecen al conjunto $(Q_\Lambda)_1$ y teniendo en cuenta que uno de los siguientes subdiagramas, o bien su opuesto, es un subdiagrama lleno de (Q, I) :



resulta una contradicción con b_4) o b_5). A partir de aquí, es claro que si $rP_a/\text{soc } P_a$ tiene más de tres sumandos directos indescomponibles, también se llega a una contradicción. \blacksquare

4.1.2 Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{D}_n

Consideraremos a continuación las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{D}_n . Esta clase de álgebras ha sido estudiada por I. Assem, A. Skowroński y B. Keller, quienes las clasificaron en [AsS2] y [K], respectivamente. Nuestro objetivo consiste en probar el mismo resultado de manera análoga al caso anterior, es decir, utilizando el Teorema [AHR] y los resultados obtenidos en el Capítulo 3, sobre extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n .

Observemos primero que si una extensión trivial Γ se obtiene de Γ' agregando una extensión trivial Γ'' de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n en un vértice b , entonces eliminando flechas resultan álgebras Λ , Λ' y Λ'' tales que $\Gamma \simeq T(\Lambda)$, $\Gamma' \simeq T(\Lambda')$ y $\Gamma'' \simeq T(\Lambda'')$. Las álgebras Λ , Λ' y Λ'' verifican que:

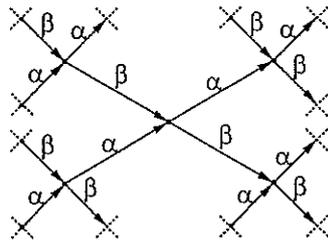
$$(Q_{\Lambda'})_0 \cap (Q_{\Lambda''})_0 = \{b\} \quad \text{y} \quad (Q_{\Lambda'})_0 \cup (Q_{\Lambda''})_0 = (Q_\Lambda)_0.$$

Por otro lado, si $\alpha \in (Q_{\Lambda'})_1$ y $\beta \in (Q_{\Lambda''})_1$, entonces las composiciones $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son cero, por serlo las composiciones correspondientes en Γ .

De modo que agregar a una extensión trivial Γ' una extensión trivial Γ'' de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{A}_n en un vértice, corresponde a extender el álgebra Λ' por un ramo en el siguiente sentido:

Definición 4.1.2. Sean $\Lambda = kQ/I$ y $\Lambda' = kQ'/I \cap kQ'$, con Q' subdiagrama lleno de Q y b un vértice de Q con a lo sumo dos vecinos en Q' . Diremos que Λ es una extensión de Λ' en b si el subdiagrama lleno Q'' de Q , donde el conjunto Q''_0 está formado por b , sus vecinos en Q' y los elementos de $Q_0 - Q'_0$, satisface que $\Lambda'' = kQ''/I \cap kQ''$ es un ramo. Es decir, es un

subdiagrama finito, lleno y conexo de:



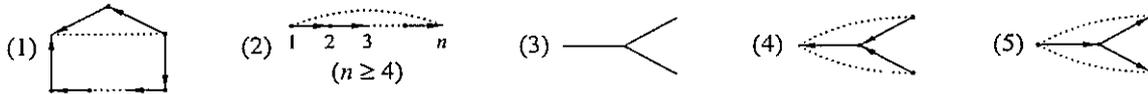
con todas las posibles relaciones de la forma $\beta \alpha = 0 = \alpha \beta$.

De aquí en adelante, si Λ es una extensión de Λ' en b , indicaremos al vértice b con un asterisco (*).

Recordemos ahora de [AsS2] la siguiente definición:

Definición 4.1.3. Un álgebra $\Lambda = kQ/I$ se dice un \mathbb{D}_n -cuadro si Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{D}_n y para toda fuente o todo pozo $i \in Q_0$, $\Lambda/\langle e_i \rangle$ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{A}_{n-1} .

Proposición 4.1.4 (Assem – Skowroński). Los \mathbb{D}_n -cuadros son los siguientes:



Probaremos a continuación esta proposición usando los resultados sobre extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n obtenidos en el Capítulo 3.

Demostración: (de la proposición 4.1.4) Usando las técnicas empleadas en el Capítulo 3 es fácil ver que las álgebras de la lista son \mathbb{D}_n -cuadros. Resta probar que la lista está completa. Supongamos entonces que $\Lambda = kQ/I$ es un \mathbb{D}_n -cuadro, luego $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n . Además $T(\Lambda)$ verifica que $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo $T(\Lambda)$ -módulo proyectivo indescomponible P , o bien que existe una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio. En efecto, en caso contrario es fácil ver que existe una fuente (o un pozo) i tal que $\Lambda/\langle e_i \rangle$ no es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{A}_{n-1} .

Si existe una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio, la condición sobre $\Lambda/\langle e_i \rangle$ implica que $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama

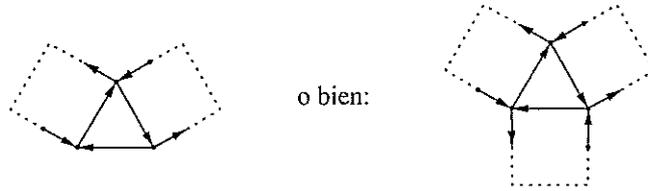


con las relaciones correspondientes. De aquí se deduce que Λ es un \mathbb{D}_n -cuadro de la forma (3), (4) o (5).

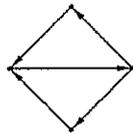
Si, en cambio, $rP/\text{soc } P$ es indescomponible para todo $T(\Lambda)$ -módulo proyectivo indescomponible P , entonces $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por uno de los diagramas que siguen, con las relaciones correspondientes:



En efecto, si $Q_{T(\Lambda)}$ es



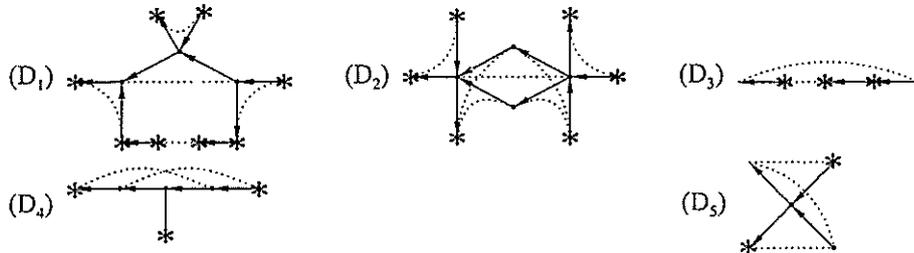
es sencillo ver que para alguna fuente (o algún pozo) $i \in Q_\Lambda$, el álgebra cociente $\Lambda/\langle e_i \rangle$ no es inclinada iterada de tipo A_{n-1} . En el caso (a), si la flecha α común a ambos ciclos no pertenece a Q_Λ , entonces se tiene que Λ es el álgebra (1) de la lista. Ahora bien, si $\alpha \in (Q_\Lambda)_1$, entonces necesariamente $T(\Lambda)$ es el álgebra:



pues si no, no se verifica la condición sobre $\Lambda/\langle e_i \rangle$. De aquí se deduce que Λ es un \mathbb{D}_n -cuadro de la forma (3) o (2).

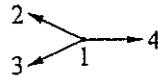
Finalmente, en el caso (b), si las flechas α y β no pertenecen a $(Q_\Lambda)_1$, entonces Λ es el \mathbb{D}_n -cuadro (2) de la lista. Un análisis análogo al efectuado anteriormente muestra que en los casos restantes Λ es un \mathbb{D}_n -cuadro de la forma (3), lo cual completa la demostración. ■

Teorema 4.1.5 (Assem – Skowroński y Keller). *Un álgebra $\Lambda = kQ/I$ es inclinada iterada de tipo \mathbb{D}_n si, y sólo si, (Q, I) es un subdiagrama finito, lleno y conexo de uno de los diagramas con relaciones siguientes y contiene al menos un cuadro:*

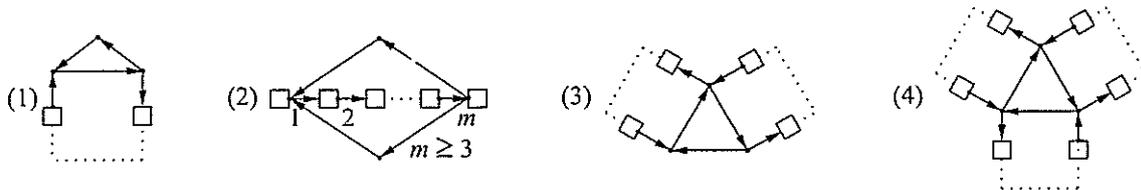


Demostración: Por el Teorema 3.1.13 sabemos que las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n con una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro

términos en el medio son las extensiones triviales de las álgebras que se obtienen de



agregando un ramo truncado en el vértice 4. Según lo estudiado en 3.2.6 y 3.3.3, las restantes extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{D}_n están dadas por los diagramas de la forma:



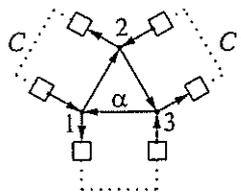
con las relaciones correspondientes, y donde en los vértices señalados con “□”, es posible agregar extensiones triviales de tipo de representación finito de clase \mathbb{A}_m .

Para cada álgebra Γ de las mencionadas arriba, mostraremos a continuación que las álgebras $\Lambda = kQ/I$ no isomorfas que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo orientado no nulo de Q_Γ , verifican que (Q, I) es un subdiagrama finito, lleno y conexo de uno de los diagramas con relaciones listados y contiene al menos un \mathbb{D}_n -cuadro.

Como $T(\Lambda) \simeq \Gamma$, se deduce del Teorema [AHR] que Λ es inclinada iterada de tipo \mathbb{D}_n . Más aún, como la lista de las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase \mathbb{D}_n está completa, concluimos que las álgebras dadas por diagramas con relaciones que verifican las condiciones del teorema son todas las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{D}_n .

Notemos, de acuerdo a lo observado con anterioridad que al eliminar flechas de una extensión trivial Γ dada, podemos reemplazar los “□” por “*”. Además, en ciertos casos es necesario reemplazar “*—*” por “*”.

Dada la extensión trivial Γ :

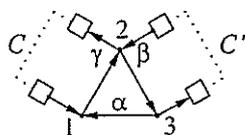


Supongamos que los ciclos C y C' tienen longitud mayor o igual que cuatro; entonces eliminando la flecha α , en los ciclos C y C' una flecha con origen o fin distinto de los vértices 1, 2 o 3, y flechas en los restantes ciclos de Γ se obtiene (D_1) o bien un subdiagrama finito, lleno y conexo del mismo.

Es claro que si C o C' tienen longitud menor que cuatro, se obtienen álgebras dadas por diagramas con relaciones que verifican las condiciones del teorema. Además, en cualquier caso,

las álgebras indicadas, contienen al cuadro (1).

Sea ahora la extensión trivial:

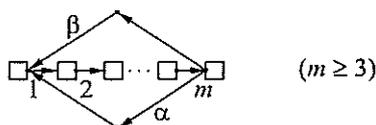


eliminando la flecha α , en el ciclo C la flecha γ , en C' una flecha con fin distinto de 2 si $\text{long}(C') \geq 4$, y flechas en los restantes ciclos, resulta un diagrama con relaciones de la forma (D_4) o un subdiagrama del mismo que verifica las condiciones requeridas, y que contiene un cuadro de la forma (2).

Si $\text{long}(C') < 4$ es fácil ver que se obtiene también un subdiagrama de (D_4) .

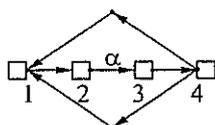
La otra orientación del lado no orientado en (D_4) , resulta eliminando β de C' , y haciendo un análisis similar sobre la flecha a eliminar en C .

Consideremos la extensión trivial Γ :



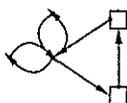
Eliminando las flechas α y β y recordando que podemos reemplazar " \square " por " $*$ ", obtenemos (D_3) o un subdiagrama finito, lleno y conexo del mismo conteniendo al cuadro (2).

Notemos que (D_2) se obtiene de



eliminando la flecha α , reemplazando los cuadrados de los vértices 2 y 3 por asteriscos, y si en los vértices 1 y 4 se tienen extensiones triviales de tipo \mathbb{A}_m , con $m \geq 3$, se considera la flecha que llega a 1 (o a 4) y la que sale de 1 (o de 4).

Finalmente, (D_5) se obtiene de la extensión trivial:



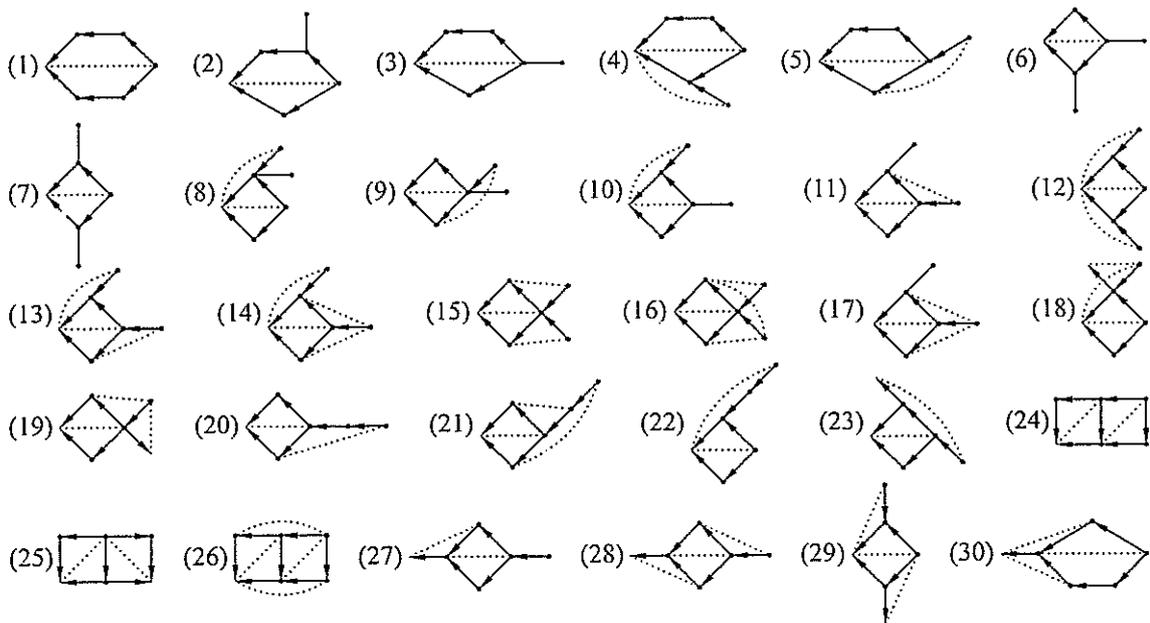
Con esto, la demostración del teorema está completa. ■

4.1.3 Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{E}_6

Nos ocuparemos ahora de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 . D. Happel probó en [Ha] el siguiente resultado, en el cual se da la lista de todas las álgebras $\Lambda = kQ/I$ inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_6 , tales que $|Q|$ no es un árbol. En lo que sigue, los lados l no orientados pueden ser orientados arbitrariamente.

Cuatro álgebras de las aquí listadas no aparecen en [Ha], pero las incluimos porque son inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_6 .

Teorema 4.1.6 (Happel). *Sea $\Lambda = kQ/I$ un álgebra inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_6 tal que $|Q|$ no es un árbol. Entonces, Λ , o bien Λ^{op} , es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*



Observación 4.1.7. Las álgebras (27), (28), (29) y (30) son las que no figuran en [Ha].

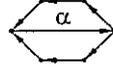
Nuestro propósito es probar el Teorema 4.1.6 usando la técnica indicada al comienzo del capítulo.

Es consecuencia inmediata de lo estudiado en la Sección 3.1, que todas las álgebras $\Lambda = kQ/I$ inclinadas iteradas de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , cuyas extensiones triviales tienen una sucesión de Auslander – Reiten con cuatro términos en el medio, verifican que $|Q|$ es un árbol. Por esta razón, sólo consideraremos las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_6 dadas en 3.2.5 y 3.3.2.

Para cada extensión trivial Γ de las indicadas antes, mostraremos a continuación todas las álgebras $\Lambda = kQ/I$ no isomorfas, que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada ciclo orientado no nulo de Q_Γ y tales que $|Q|$ no es un árbol. Se tiene entonces que Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_6 , ya que $T(\Lambda) \simeq \Gamma$.

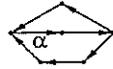
Por otra parte, como la lista de las extensiones triviales mencionadas está completa, resulta que la de las inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_6 , también lo está.

Demostración: (del teorema 4.1.6) Para la extensión trivial Γ :



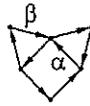
eliminando la flecha α se obtiene el álgebra (1) de la lista.

Dada la extensión trivial Γ :



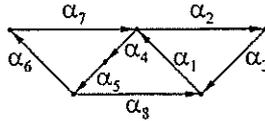
eliminando α resulta un álgebra que corresponde a una de las orientaciones del lado l en (3).

Si Γ es la extensión trivial dada por el diagrama siguiente, con las relaciones correspondientes:



entonces al eliminar las flechas α y β resulta un álgebra que corresponde a una de las posibles orientaciones del lado l en (2).

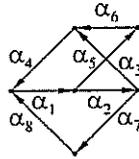
Para la extensión trivial Γ :



sea J_Γ el conjunto de flechas eliminadas de Q_Γ . Tenemos los siguientes casos:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_7\}$ resulta el álgebra Λ tal que Λ^{op} corresponde a la otra orientación del lado l de (2).
- ii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6\}$ tenemos el álgebra (5) de la lista.
- iii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_4\}$ se obtiene un álgebra de la clase (6) de la lista.
- iv) Si $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$ resulta el álgebra (27).
- v) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_5\}$, el álgebra Λ resultante es tal que Λ^{op} es una de las posibles orientaciones de (9).
- vi) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_5\}$ se obtiene el álgebra Λ , de modo que Λ^{op} es isomorfa al álgebra (23) de la lista.

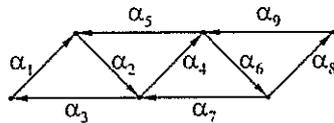
Dada la extensión trivial Γ :



Sea, como antes, J_Γ el conjunto de flechas eliminadas. Se presentan las siguientes posibilidades:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_5\}$ se obtiene el álgebra Λ tal que Λ^{op} es isomorfa a una de las álgebras de la clase (6).
- ii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_6\}$ resulta un álgebra cuya opuesta es isomorfa al álgebra (20) de la lista.
- iii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1\}$ el diagrama con relaciones del álgebra Λ resultante corresponde al álgebra (24) de la lista.

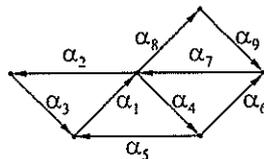
Consideremos ahora la extensión trivial Γ :



Sea J_Γ el conjunto de flechas eliminadas. Tenemos que estudiar las siguientes posibilidades:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_9\}$ se obtiene un álgebra que corresponde a una de las orientaciones posibles de los lados l_1, l_2 del álgebra (7).
- ii) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_7, \alpha_8\}$ resulta un álgebra de la clase (8) de la lista.
- iii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$ tenemos un álgebra que corresponde a una de las de clase (11).
- iv) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_7, \alpha_9\}$ se obtiene el álgebra Λ tal que Λ^{op} es isomorfa al álgebra (22).
- v) Para $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_6\}$ se tiene el álgebra (26) de la lista.
- vi) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_8\}$ se obtiene el álgebra (28) de la lista.

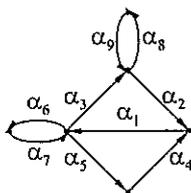
Sea Γ la extensión trivial dada por:



y sea el conjunto J_Γ definido como antes. Los casos a considerar son:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_8\}$ se obtiene un álgebra que corresponde a una de las orientaciones posibles de los lados l_1, l_2 del álgebra (7).
- ii) $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_9\}$. En este caso resulta un álgebra correspondiente a una de las orientaciones posibles del lado l de (9).
- iii) Para $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_8\}$ se obtiene el álgebra Λ , tal que Λ^{op} es isomorfa a una de las álgebras de clase (11).
- iv) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_9\}$ resulta un álgebra cuya opuesta es isomorfa al álgebra (15) de la lista.
- v) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_7\}$ obtenemos el álgebra (25) de la lista.

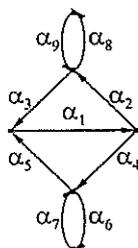
Analizando la extensión trivial Γ :



se presentan los siguientes casos:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_7, \alpha_9\}$ se obtiene un álgebra cuya opuesta es isomorfa a una de las álgebras de clase (10).
- ii) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_9\}$ resulta el álgebra Λ , tal que Λ^{op} es isomorfa a una de clase (14) de la lista.

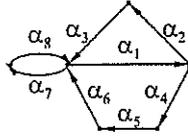
Dada la extensión trivial Γ :



se tienen las siguientes posibilidades:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8\}$ obtenemos el álgebra (12).
- ii) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_7, \alpha_8\}$ resulta el álgebra (29):

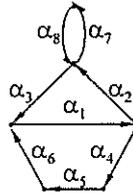
Sea ahora la extensión trivial Γ :



Se presentan los siguientes casos:

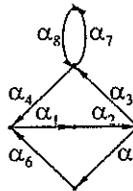
- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_7\}$ se obtiene el álgebra Λ tal que Λ^{op} es isomorfa a una de las álgebras de clase (3).
- ii) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_8\}$ resulta el álgebra (30) de la lista.

Dada la extensión trivial Γ :



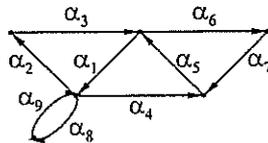
eliminando las flechas α_1, α_7 resulta el álgebra (4) de la lista.

Consideremos la extensión trivial Γ :



eliminando las flechas α_1, α_7 resulta un álgebra correspondiente a una de las orientaciones posibles de (10).

Dada la extensión trivial Γ :

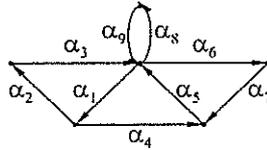


tenemos que considerar las siguientes posibilidades:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8\}$ se obtiene un álgebra que corresponde a una de las orientaciones posibles de los lados l_1, l_2 en (6).
- ii) Cuando $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_9\}$ tenemos el álgebra Λ tal que Λ^{op} corresponde a una de las posibles orientaciones de (8).

- iii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_8\}$ se obtiene el álgebra (13) de la lista.
- iv) Para $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8\}$ resulta un álgebra de la clase (17).
- v) Si $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_8\}$ tenemos el álgebra (18) de la lista.

Finalmente, dada la extensión trivial Γ :



se presentan los siguientes casos:

- i) Si $J_\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_9\}$ se obtiene un álgebra que corresponde a una de las orientaciones posibles de los lados l_1, l_2 en (6).
- ii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_8\}$ resulta el álgebra (16) de la lista.
- iii) Si $J_\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_9\}$ obtenemos un álgebra Λ tal que Λ^{op} corresponde a una de la clase (17).
- iv) Para $J_\Gamma = \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9\}$ se obtiene el álgebra (19) de la lista.

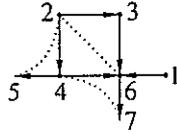
Esto completa la demostración del teorema. **■**

4.1.4 Álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8

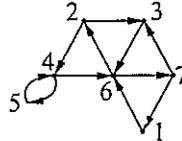
Las álgebras inclinadas iteradas de tipos Dynkin \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 fueron estudiadas por B. Roggon en [Ro], utilizando un programa en Pascal que forma parte del paquete de programas CREP sobre teoría de representaciones. En dicho trabajo se indica en particular que existen, a menos de isomorfismos, 3.341 álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_7 y 21.948 álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_8 . Por esta razón, no listaremos aquí todas estas álgebras. Vale la pena mencionar, sin embargo, que si éste fuera el propósito, entonces en principio basta aplicar la misma técnica que empleamos para la clasificación de las álgebras inclinadas iteradas de tipo \mathbb{E}_6 . Es claro que la única dificultad radica en la enorme cantidad de casos a considerar.

Daremos a continuación algunos ejemplos para ilustrar cómo decidimos si un álgebra es inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_7 ó \mathbb{E}_8 , aplicando los resultados obtenidos sobre las extensiones triviales de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_p .

Ejemplo 4.1.8. Sea Λ el álgebra dada por el siguiente diagrama con relaciones:

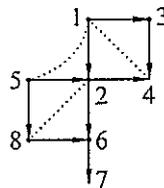


Entonces, la extensión trivial $T(\Lambda)$ de Λ está dada por el diagrama que sigue, con las relaciones correspondientes:

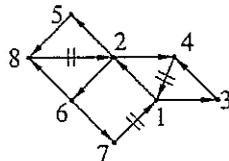


De acuerdo a lo visto en 3.3.4, $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_7 . Esto prueba que Λ es inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_7 .

Ejemplo 4.1.9. Consideremos ahora el álgebra Λ :

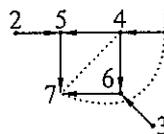


En este caso $T(\Lambda)$ está definida por el siguiente diagrama, con las relaciones correspondientes:

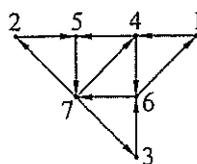


Según el Teorema 3.3.17, $T(\Lambda)$ es de tipo de representación finito de clase de Cartan \mathbb{E}_8 y en consecuencia, Λ es inclinada iterada de tipo Dynkin \mathbb{E}_8 .

Ejemplo 4.1.10. Si Λ está definida por el diagrama con relaciones:



Entonces $T(\Lambda)$ está dada por el diagrama con relaciones que sigue:



Como $T(\Lambda)$ no es una de las álgebras listadas en el Teorema 3.3.16, concluimos que Λ no es

inclinada iterada de tipo \mathbb{E}_7 .

4.2 Álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideano $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$

Un resultado similar a los obtenidos en el Teorema [HW] y en el Teorema [AHR], fue probado por I. Assem, J. Nehring y A. Skowroński en [AsNS], para el caso de tipo de representación infinito. A efectos de enunciar el teorema correspondiente es necesario recordar algunas definiciones.

Consideraremos álgebras Λ simplemente conexas, en el sentido de [AsS1], es decir, Λ es triangular y para cualquier presentación (Q, I) de Λ , el grupo fundamental de (Q, I) es el trivial.

Recordemos ahora que un álgebra Λ se dice **doméstica** si existe un número finito de funtores $F_i : \text{mod } k[x] \rightarrow \text{mod } \Lambda$, $1 \leq i \leq n$, donde $k[x]$ es el anillo de polinomios en la variable x , satisfaciendo las siguientes condiciones:

- i) Para cada i , $F_i = - \bigotimes_{k[x]} Q_i$, donde Q_i es un $k[x]$ - Λ -módulo, que es finitamente generado y libre como $k[x]$ -módulo.
- ii) Para cada dimensión d , todos salvo un número finito de Λ -módulos indescomponibles no isomorfos de k -dimensión d , son de la forma $F_i(M)$, para algún i y algún $k[x]$ -módulo indescomponible M .

Finalmente, Λ se dice n -paramétrica si el número mínimo de tales funtores es n .

Estamos en condiciones, ahora, de enunciar el teorema mencionado previamente:

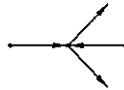
Teorema 4.2.1 (Assem – Nehring – Skowroński). *Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita, básica y conexa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k . Si Λ es simplemente conexa, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) $T(\Lambda)$ es de tipo de representación infinito y doméstica.
- ii) $T(\Lambda)$ es 2-paramétrica.
- iii) Existe un álgebra Λ' inclinada de tipo euclideano $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$ de tipo de representación infinito tal que $T(\Lambda) \simeq T(\Lambda')$.
- iv) Λ es inclinada iterada de tipo euclideano $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$.

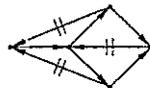
A continuación damos algunos ejemplos que ilustran cómo aplicar los resultados del Capítulo 1, el Teorema 4.2.1 y la lista [HV] en el estudio de álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$ de tipo de representación finito. Más precisamente, dada un álgebra Λ de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$ construimos el diagrama con relaciones de $T(\Lambda)$. Luego, todas las álgebras Λ' tales que $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$ son las que se obtienen eliminando exactamente una flecha de cada uno de los ciclos orientados no nulos de $Q_{T(\Lambda)}$. Por el Teorema 4.2.1, las álgebras Λ' son inclinadas iteradas de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$. Aplicando el criterio de Bongartz [Bo2], resulta que si Λ' no contiene un álgebra mansa oculta como subcategoría convexa llena, entonces Λ' es de tipo de representación finito.

Recíprocamente, supongamos que un álgebra Λ dada es tal que $T(\Lambda) \simeq T(\Lambda')$, donde Λ' es un álgebra de la lista [HV] de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$. Entonces, por el Teorema 4.2.1, resulta que Λ es inclinada iterada de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ó $\tilde{\mathbb{E}}_p$. Nuevamente, aplicando el criterio de Bongartz, tenemos que si Λ no contiene un álgebra mansa oculta como subcategoría convexa llena, entonces Λ es de tipo de representación finito.

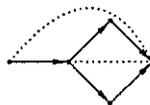
Ejemplo 4.2.2. Sea Q el diagrama:



Entonces $\Lambda = kQ$ es un álgebra de tipo euclideo $\tilde{\mathbb{D}}_4$. La extensión trivial de Λ está dada por el diagrama que sigue, con las relaciones correspondientes:



Eliminando las flechas indicadas con “//” obtenemos el álgebra Λ' :

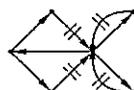


Como $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$, se tiene, por el Teorema 4.2.1 que Λ' es inclinada iterada de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_4$. Más aún, como Λ' no contiene un álgebra de la lista [HV] como subcategoría convexa llena, concluimos que Λ' es de tipo de representación finito.

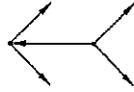
Ejemplo 4.2.3. Dada el álgebra Λ :



Tenemos que $T(\Lambda)$ está dada por el diagrama con relaciones siguiente:

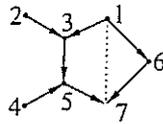


Eliminando las flechas señaladas se obtiene el álgebra Λ' :

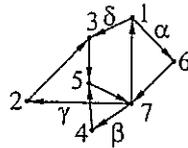


Ahora bien, Λ' es hereditaria de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_5$ y $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$. En consecuencia, Λ es inclinada iterada de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_5$. Además, Λ es de tipo de representación finito, pues no contiene ninguna subcategoría convexa llena que sea mansa oculta.

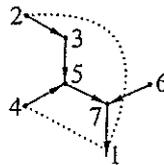
Ejemplo 4.2.4. Consideremos el álgebra Λ mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$ que sigue:



Luego $T(\Lambda)$ es el álgebra dada por el diagrama:

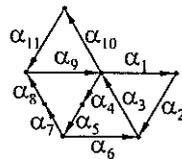


con las relaciones correspondientes. Eliminando las flechas α , β , γ y δ obtenemos el álgebra Λ' :

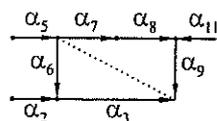


Como $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda)$, se deduce del Teorema 4.2.1 que Λ' es inclinada iterada de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_6$. Por otro lado, del criterio de Bongartz resulta que Λ' es de tipo de representación finito.

Ejemplo 4.2.5. La extensión trivial Γ , dada por el diagrama:

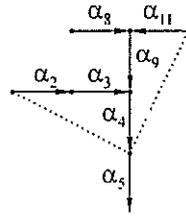


con las relaciones correspondientes, es isomorfa a la extensión trivial del álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$:



Sea Λ' el álgebra que se obtiene de Γ eliminando las flechas α_1 , α_6 , α_7 y α_{10} . Es claro que Λ'

está dada por el diagrama con relaciones:



Como $T(\Lambda') \simeq T(\Lambda) \simeq \Gamma$, se tiene por el Teorema 4.2.1 que Λ' es inclinada iterada de tipo $\tilde{\mathbb{E}}_7$. Más aún, Λ' es de tipo de representación finito.

Bibliografía

- [As] I. Assem. *Tilting theory – an introduction*. Topics in algebra, Banach Centre Publication 26, PWN, Warsaw (1990), 127–180.
- [AsH] I. Assem and D. Happel. *Generalized tilted algebras of type \mathbb{A}_n* . Comm. Algebra 9 (1981), 2101–2125.
- [AsHR] I. Assem, D. Happel and O. Roldán. *Representation-finite trivial extension algebras*. J. Pure Appl. Algebra 33 (1984), 235–242.
- [AsNS] I. Assem, J. Nehring and A. Skowroński. *Domestic trivial extension of simply connected algebras*. Tsukuba J. Math., 13 (1) (1989), 31–72.
- [AsS1] I. Assem and A. Skowroński. *On some classes of simply connected algebras*. Proc. London Math. Soc., (3) 56, (1988), 417–450.
- [AsS2] I. Assem et A. Skowroński. *Algèbres pré-inclinées et catégories dérivées*. Séminaire M. P. Malliavin, Lecture Notes in Math. 1404, Springer-Verlag (1989), 1–34.
- [AsS3] I. Assem and A. Skowroński. *Algebras with cycle-finite derived categories*. Math. Ann. 280 (1988), 441–463.
- [AsS4] I. Assem and A. Skowroński. *Quadratic forms and iterated tilted algebras*. Journal of Algebra 128 (1990), 55–85.
- [AuPR] M. Auslander, M. I. Platzbeck and I. Reiten. *Coxeter functors without diagrams*. Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 1–46.
- [AuPT] M. Auslander, M. I. Platzbeck and G. Todorov. *Homological theory of idempotent ideals*. Trans. Amer. Math. Soc. 332, 667–692.
- [AuRS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge studies in advanced math. Cambridge University Press, 1995.
- [BaB] R. Bautista and S. Brenner. *On the number of terms in the middle of an almost split sequence*. Lecture Notes in Math. 903, Springer-Verlag (1981), 1–8.

- [BeGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev. *Coxeter functors and Gabriel's theorem*. Usp. Mat. Nauk **28** (1973), 19–33. Transl. Russ. Math. Surv. **28** (1973), 17–32.
- [Bo1] K. Bongartz. *Tilted algebras*. Proc. ICRA III (Puebla), Lectures Notes in Math. **903**, Springer Verlag (1981).
- [Bo2] K. Bongartz. *A criterion for finite representation type*. Math. Ann. **269** (1984), 1–12.
- [Br] S. Brenner. *The almost split sequence starting with a simple module*. Arch. Math. **62**, 203 – 206 (1994).
- [BrB] S. Brenner and M. Butler. *Generalizations of Bernstein – Gelfand and Ponomarev reflection functors*. Proc. ICRA II (Ottawa), Lecture Notes in Math. **832**, Springer Verlag (1980).
- [BretLR] O. Bretscher, C. Läser and C. Riedtmann. *Self-injective and simply connected algebras*. Manuscripta Math. **36** (3) (1981/82), 253–307.
- [Bou] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie. IV–VI*. Hermann & Co., Paris, 1960.
- [Ha] D. Happel. *Tilting sets on cylinders*. Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985), 21–55.
- [HaV] D. Happel and D. Vossieck. *Minimal algebras of infinite representation type with pre-projective component*. Manuscripta Math. **42** (1983), 221–243.
- [HaHKU] D. Happel, S. Hartlieb, O. Kerner and L. Unger. *On perpendicular categories of stones over quiver algebras*. Comm. Math. Helvetici **71** (1996), 463–474.
- [Ho1] M. Hoshino. *Splitting torsion theories induced by tilting modules*. Comm. Algebra **11** (1983), 427–441.
- [Ho2] M. Hoshino. *Trivial extensions of tilted algebras*. Comm. Algebra **10** (18) (1982), 1965–1999.
- [HuW] D. Hughes and J. Waschbüsch. *Trivial extensions of tilted algebras*. Proc. London Math. Soc. (3) **46** (1983), 347–364.
- [GL] W. Geigle and H. Lenzing. *Perpendicular categories with applications to representations and sheaves*. J. Algebra. (144) **2** (1991), 273–343.
- [GrR] E. Green and I. Reiten. *On the construction of ring extensions*. Glasgow Math. J. **17** (1979), 1–11.
- [K] B. Keller. *Algèbres héréditaires par morceaux de type \mathbb{D}_n* . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), 483–486.

- [IW] Y. Iwanaga and T. Wakamatsu. *Trivial extensions of artin algebras*. Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Springer Lecture Notes 832 (1980), 295–301.
- [M] W. Müller. *Unzerlegbare Moduln über artinschen Ringen*. Math. Z. 137 (1974), 197–226.
- [Rin] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*. Lectures Notes in Math. 1099, Springer-Verlag (1984).
- [Rie] C. Riedtmann. *Algebren, Darstellungsköcker, Überlagerungen und zurück*. Comm. Math. Helv. 55 (1980), 199–224.
- [Ro] B. Roggon. *Selfinjective and iterated tilted algebras of type \mathbb{E}_6 , E_7 , \mathbb{E}_8* . 1–30.
- [S] A. Schofield. *Generic representations of quivers*, preprint.
- [T] H. Tachikawa. *Representation of trivial extension of hereditary algebras*. Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Springer Lecture Notes 832 (1980), 137–287.
- [Y1] K. Yamagata. *Extensions over hereditary artinian rings with self-dualities I*. J. Algebra 73 (2) (1981), 386–433.
- [Y2] K. Yamagata. *On algebras whose trivial extensions are of finite representation type*. Proc. ICRA III (1980), Lecture Notes in Math. 903, Springer Verlag (1981). 364–371.

